Jurnal Penelitian Pembelajaran Matematika Sekolah (JP2MS) eISSN 2581-253X
Volume 4, No.2, Agustus 2020, pp : 110-123
DOI: https://doi.org/10.33369/jp2ms.4.2.110-123.

PROSES BERPIKIR MAHASISWA CALON GURU DALAM MENGONSTRUKSI GRAFIK FUNGSI DENGAN MENGGUNAKAN KONSEP TURUNAN

Ringki Agustinsa[1]*, Syafdi Maizora[2], Rusdi [3], Yunia Jumita Ningrum[4]
[1,2,3,4]Prodi S1 Pendidikan Matematika FKIP UNIB
email : [1*]ringki@unib.ac.id
* Korespondensi penulis

Abstrak

Penelitian ini bertujuan mengungkapkan proses berpikir mahasiswa calon guru dalam mengonstruksi grafik fungsi dengan menggunakan konsep turunan. Penelitian ini merupakan penelitian deskriptif dengan pendekatan kualitatif. Adapun subjek penitian yaitu mahasiswa calon guru matematika yang sedang menempuh kuliah kalkulus diferensial sebanyak 6 orang dari 58 orang mahasiwa. Hasil penelitian menunjukkan bahwa mahasiswa calon guru sudah melakukan analisis pra kalkulus dan kalkulus dalam menggambat grafik. Meskipun masih terdapat kesalahan pada analisis yang telah dilakukkannya. Analisis yang dilakukan diantaranya menentukan kecekungan kurva, titik stationer, melakukan uji turunan pertama dan kedua. Dari hasil penelitian disimpulkan bahwa : 1) Untuk mengkonstruksi grafik dengan menggunakan kalkulus diperlukan analis pra kalkulus dan analisis kalkulus, 2) subjek penelitian masih mengalami beberpa kesalahan konsep dalam analisis prakalkulus dan kalkulus. Hal ini akan menyebabkan kesalahan dalam menggambar grafik, 3)data hasil analisis tidak digunakan secara utuh oleh subjek penelitian ketika menggambar grafik fungsi.

Kata kunci : Grafik fungsi, Konsep turunan, Proses berpikir,

Abstract

This study aims to reveal the thought processes of prospective teacher students in constructing function graphs using derivative concepts. This research is a descriptive study with a qualitative approach. The research subjects were six out of 58 students who are prospective mathematics teachers taking differential calculus. The results showed that student teacher candidates had already performed pre-calculus and calculus analyzes in drawing graphs. Although there are still errors in the analysis he has done. The analysis carried out included determining the curvature of the curve, the stationary point, conducting the first and second derivative tests. From the results of the study it was concluded that: 1) To construct graphs using calculus required pre-calculus analysis and calculus analysis, 2) research subjects still experienced several misconceptions in the precalculus and calculus analysis. This will cause errors in drawing graphs, 3) data from the analysis results are not used completely by the research subject when drawing function graphs.

Key words: function graph, derivative concept, thought process,

Cara menulis sitasi: Agustinsa, R., Maizora, S., Rusdi & Ningrum, Y.J. (2020). Proses Berpikir Mahasiswa Calon Guru Dalam Mengonstruksi Grafik Fungsi Dengan Menggunakan Konsep Turunan. *Jurnal Penelitian Pembelajaran Matematika Sekolah* (*JP2MS*), 4 (2), 110 - 123

PENDAHULUAN

Kalkulus diferensial merupakan salah satu matakuliah wajib bagi mahasiswa calon guru matematika. Adapun materi yang tercakup dalam kalkulus diferensial ini yaitu fungsi, limit fungsi, kekontinuan fungsi pada suatu titik atau pada suatu interval tertutup, turunan, aturan pencarian turuanan, aturan rantai, dan aplikasi turunan. Salah sub bab pada bab aplikasi turunan adalah mengonstruksi grafik dengan menggunakan kalkulus. Mengonstruksi grafik merupakan hal yang penting dalam pembelajaran matematika. Hal ini disebabkan karena dengan mengetahui bentuk grafik dari suatu fungsi akan memudahkan kita mengetahui lebih detil tentang fungsi tersebut. Misalkan diberikan persamaan $x^2 - 4x + 3 = 0$, siswa diminta untuk menentukan nilai x berapa saja yang memenuhi persamaan tersebut. Bagi siswa yang memahami grafik dan bisa menggambarkan grafik fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 3$ tentu akan mudah untuk menentukan solusinya. Karena solusinya merupakan nilai absis koordinat perpotongan antara sumbu X dan grafik $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Disamping itu pengetahuan tentang bagaimana menggambar grafik suatu fungsi juga sangat berguna bagi mahasiswa yang sedang menempuh mata kuliah kalkulus diferensial. Sebagai contoh, untuk memudahkan mahasiswa memahami tentang limit suatu fungsi, akan lebih muda jika mahasiswa tersebut mengetahui bentuk grafik dari fungsinya. Suatu fungsi mempunyai nilai limit di suatu titik $x = c$, akan mudah mengetahuinya jika gambar grafik fungsinya tersedia. Karena jelas sekali bahwa kalau grafik fungsinya mengalami lompatan atau bergoyang dengan cepat pada titik tersebut maka limit fungsi pada titik tersebut tidak ada (Varberg, Purcell, & Rigdon, 2007). Selain pada limit, pengetahuan tentang grafik fungsi juga akan sangat berguna untuk menentukan suatu fungsi kontinu atau tidak pada suatu titik atau pada suatu interval.

Masalah grafik fungsi telah banyak dikaji oleh peneliti, diantaranya: Blanton., Barbara.,& Angela (2015) meneliti tentang generalisasi hubungan fungsional pada siswa kelas VI; Ocal (2017) meneliti tentang miskonsepsi dalam menggambar grafik, khususnya mengenai asimtot grafik fungsi; Stalvey & Vidakovic (2015) meneliti pemahaman siswa dari konsep fungsi parametric, Montiel, Vidakovic, & Kabael (2008) meneliti tentang hubungan antara pemahaman siswa tentang fungsi dalam sistem koorinat kartesius dan koordinat polar, Darmadi (2017) mengidentifikasi kesalahan visual mahasiswa dalam menggambar grafik fungsi real. Dalam beberapa penelitian di atas, belum ada penelitian tentang menggambar grafik dengan menggunakan kalkulus (dalam hal ini menggunakan konsep turunan).

Namun berdasarkan observasi awal peneliti pada mahasiswa yang sedang menempuh mata kuliah kalkulus differensial. Ditemukan masih banyak, bahkan sebagian besar mahasiswa masih belum benar dalam menggambar grafik suatu fungsi, terlebih jika fungsi tersebut adalah fungsi bercabang atau fungsi mutlak dan fungsi bilangan bulat terbesar yang sudah dimodifikasi. Mahasiswa masih belum bisa menggambarkan fungsi bercabang $f(x) = \begin{cases} x^2, & jika\, x \leq -2 \\ -x, & jika - 2 < x \leq 0 \\ 2x+1, & jika\, x > 0 \end{cases}$. Khusus fungsi bercabang yang bersyarat seperti ini sebagian besar mahasiswa tidak bisa menggambarkan grafiknya. Mahasiswa kebingungan dengan syarat, dengan cabangnya karena selama ini mereka menggambar grafik fungsi tunggal dan tanpa syarat. Disamping itu juga beberapa mahasiswa masih mengalami kesulitan dalam memahami konsep turunan. Oleh karena itu peneliti menduga bahwa mahasiswa akan mengalami kesulitan juga dalam menggambar grafik dengan menggunakan kalkulus. Karena menggambar grafik dengan menggunakan kalkulus ini, selaian pengetahuan tentang menggambar grafik (bagaimanan menentukan titik potong dengan sumbu-x, sumbu-y, dsb) juga dibutuhkan pengetahuan tentang konsep turuanan yang akan digunakan dalam menggambar, seperti turunan pertama untuk melihat interval dimana fungsi naik, turuan, atau statis (tetap), kemudian turunan kedua digunakan untuk menentukan kecekungan dan titik belok fungsi.

Didalam menyelesaikan suatu masalah matematika, termasuk juga mengonstruksi grafik, mahasiswa tentu akan melakukan proses berpikir. Penelitian tentang proses berpikir telah banyak dilakukan oleh peneliti-peneliti terdahulu, diantarnya: Subanji (2007) melakukan penelitian tentang proses berpikir mahasiswa dalam mengonstruksi grafik kejadian dinamika berkebalikan, Ringki (2014) melakukan penelitian tentang *defragmenting* proses beripikir siswa SMP dalam menyelesaikan masalah proporsi. Penelitian Subanji (2007) mengkaji tentang grafik sedangkan pada penelitian ini mengkaji tentang bagaimana mengonstruksi bukti, penelitian Ringki (2014) dilakukan pada siswa SMP sedangkan penelitian yang akan dilakukan ini dilakukan pada mahasiswa semester VI. Menurut Siswono (2002) proses berpikir sendiri adalah proses yang dimulai dengan menerima data, mengolah dan menyimpannya di dalam ingatan serta memanggil kembali dari ingatan pada saat dibutuhkan untuk pengolahan selanjutnya. Sedangkan proses berpikir siswa menurut Marpaung (Rustam 1995: 7) adalah proses yang dimulai dari penemuan informasi (dari luar maupun dari dalam diri siswa), pengolahan, penyimpanan dan pemanggilan kembali informasi itu dalam ingatan siswa.

METODE

Penelitian ini merupakan penelitian deskriptif dengan pendekatan kualitatif. Hal ini sesuai dengan ciri-ciri pendekatan kualitatif yang dikemukakan oleh Moleong (2006: 4 -8), yaitu: (1) peneliti bertindak sebagai instrumen utama, karena disamping sebagai pengumpul dan penganalisis data, peneliti juga terlibat langsung dalam proses penelitian, (2) mempunyai latar belakang ilmiah (*natural setting*), data yang diteliti dan dihasilkan akan dipaparkan sesuai dengan yang terjadi di lapangan,(3) hasil penelitian bersifat deskriptif, (4) lebih mementingkan proses daripada hasil, (5) adannya batasan masalah yang ditentukan dalam fokus penelitian, dan (6) analisis data cenderung bersifat induktif. Data yang dikumpulkan dalam penelitian ini pada umumnya berupa data verbal, maka jenis penelitian ini adalah penelitian kualitatif deskriptif ekploratif.

Penelitian ini dilakukan pada mahasiswa semester II yang sedang menempuh mata kuliah Kalkulus Diferensial 2017/2018. Peneliti merencanakan mengambil dua kelas paralel, masing-masing 35 dan 23 mahasiswa orang subjek penelitian. Atau dengan total calon subjek penelitian 58 orang. Dari 58 orang calon subjek penelitian ini nanti, peneliti merencanakan hanya mengambil sebanyak 6 subjek penelitian, yaitu yang mewakili jawaban benar, jawaban salah tetapi mampu menjawab benar setelah refleksi, jawaban salah yang tidak juga mampu menjawab benar setelah refleksi yang masing-masing kategori dua orang.

Instrumen utama dalam penelitian ini lembar soal yang harus dikerjakan oleh mahasiswa yang diambil dari buku kalkulus yang digunakan dalam pembelajaran dikelas. Pengumpulan data dilakukan dengan memberikan masalah menggambar grafik dengan menggunakan turunan kepada mahasiswa. Dalam proses menyelesaikan masalah tersebut mahasiswa diminta mengungkapkan apa yang sedang ia pikirkan ketika menyelesaikan masalah. Kemudian peneliti merekam ungkapan verbal mahasiswa tersebut.

Setelah selesai dengan mahasiswa yang satu, akan dilakukan proses yang sama terhadap mahasiswa lain yang menjadi objek penelitian yang sudah ditentukan sebelumnya. Pengumpulan data semacam ini tergolong dalam metode TOL/*Think Out Loud* (Olson, Duffy, dan Mack, dalam Subanji, 2007) juga dikenal dengan istilah *Think Alouds*. Metode ini dilakukan dengan meminta subjek penelitian untuk menyelesaikan masalah sekaligus menceritakan apa yang dipikirkannya.

Proses analisis data dalam penelitian ini dilakukan dengan langkah-langkah: (1) mengadakan reduksi data, yaitu *menyeleksi*, memfokuskan dan mengklasifikasikan data yang sejenis, kemudian disederhanakan dengan cara membuang hal-hal yang tidak perlu, (2) menyajikan data, (3) menarik kesimpulan. Hal ini mengacu pada teknik analisis data model alir yang dikemukakan oleh Miles dan Huberman (Nunung, 2013).

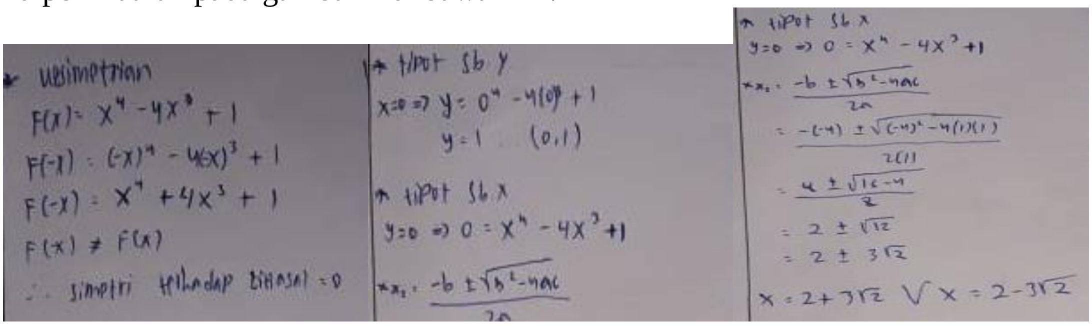
HASIL DAN PEMBAHASAN

Penelitian ini dilakukan untuk mengetahui proses berpikir mahasiswa dalam mengkonstruksi grafik fungsi *dengan* menggunakan konsep kalkulus. Adapun subjek penelitian dalam penelitian ini mahasiswa yang sudah menempuh kuliah kalkulus diferensial. Untuk itu akan dipaparkan tiga kelompok subjek penelitian yang memiliki karakteristik yang berbeda. Kelompok pertama akan diwaki oleh subjek S1, kelompok kedua diwakili S2, sedangkan kelompok ketiga diwakili oleh S3.

Hasil

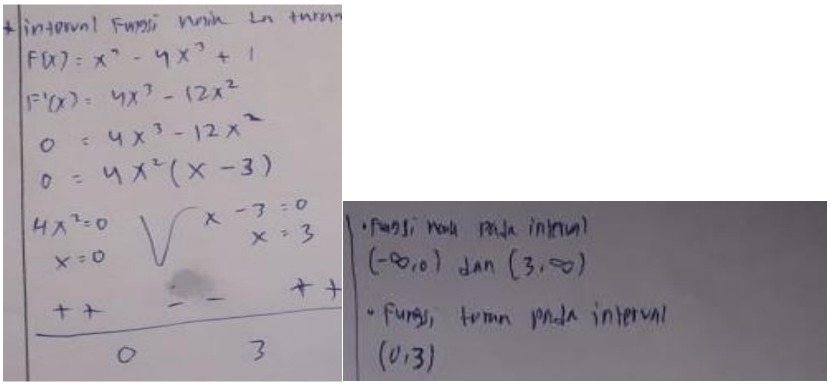
a. Hasil S1 dalam mengkonstruksi grafik fungsi dengan menggunakan kalkulus.

Sebelum menggambar grafik fungsi, S1 melakukan analisis pra kalkulus terlebih dahulu, yaitu dengan mengecek kesimetrian dan titik potong grafik dengan sumbu koordinat. Berdasarkan analisis perhitungan yang telah dilakukannya, S1 menemukan bahwa $f(-x) \neq f(x)$ dan kemudaian dia menyatakan bahwa grafik fungi $f(x)$ simetri terhadap sumbu titik asal koordinat $(0,0)$. Berdasarkan analisis perhitungan yang telah dilakukannya juga, S1 menyatakan bahwa grafik memotong sumby Y di $(0,1)$ dan memotong sumbu X di dua tempat yaitu saat $x = 2 + 3\sqrt{2}$ dan $x = 2 - 3\sqrt{2}$. Adapun jawaban S1 diperlihatkan pada gambar 1 di bawah ini.



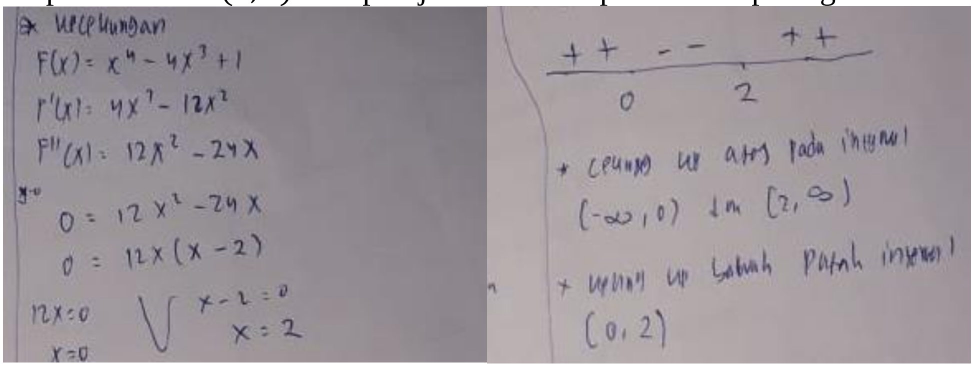
Gambar 1. Analisis pra kalkulus mencari sumbu simetri dan titik potong

Setelah melakukan analisis pra kalkulus S1 juga sudah melakukan analisis kalkulus untuk menggambar grafik fungsi $f(x)$. S1 pertama tama mencari daerah dimana fungsi naik dan turun. Untuk itu S1 melakukan uji turunan pertama, dimana S1 memperoleh hasil turunan pertama yaitu $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$. Kemudian S1 memasukkan nilai $f'(x) = 0$ diperoleh $x = 0$ dan $x = 3$. S1 pada akhirnya menyimpulkan bahwa fungsi naik pada interval $(-\infty, 0)$ atau $(3, \infty)$ dan fungsi turun pada $(0,3)$. Adapun jawaban S1 diperlihatkan pada gambar 2 di bawah ini.



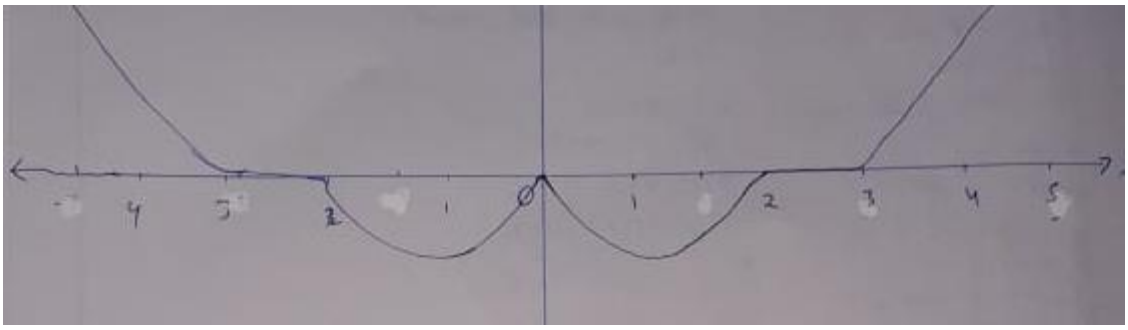
Gambar 2. Analisis kalkulus S1 mencari interval fungsi naik dan turun

Setelah mencari interval diman fungsi naik dan turun, S1 kemudian mencari kecekungan fungsi. Hal ini dilakukan S1 dengan mencari turunan kedua. Dengan mendeferensialkan sekali lagi turunan pertama yang sudah diperolehnya, S1 mendapatkan bahwa $f''(x) = 12x^2 - 24x$. Kemudian S1 memasukkan nilai $f''(x) = 0$ dan melakukan operasi aljabar diperoleh $x = 0$ atau $x = 2$, S1 kemudian menuliskan bahwa fungsi f cekung ke atas pada interval $(-\infty, 0)$ atau $(2, \infty)$. Sedangkan grafik fungsi f cekung ke bawah pada interval $(0, 2)$. Adapun jawaban S1 diperlihatkan pada gambar 3 di bawah ini.



Gambar 3. Analisis kalkulus S1 mencari kecekungan fungsi

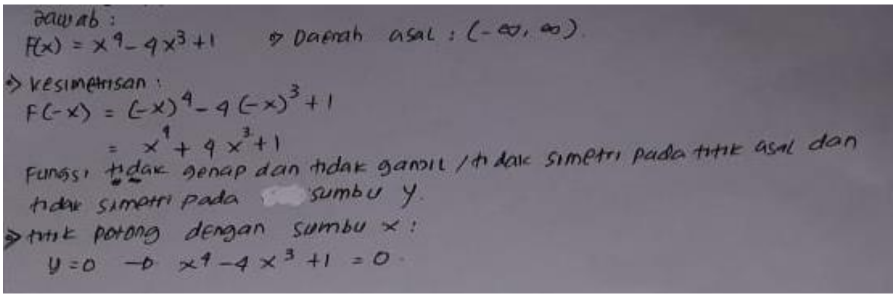
Berdasarkan analisis pendahuluan yang sudah dilakukannya ini, akhirnya S1 menggambarkan grafik fungsi $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$. Adapun hasilnya ditampilkan pada gambar 4 berikut ini.



Gambar 4. Grafik fungsi $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$ yang digambar S1

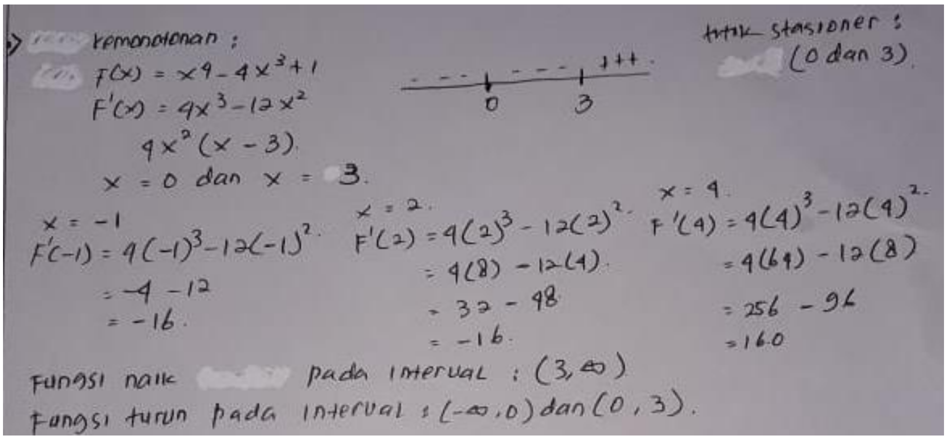
b. Hasil S2 dalam mengkonstruksi grafik fungsi dengan menggunakan kalkulus

Sebelum menggambar grafik fungsi, S2 melakukan analisis pra kalkulus terlebih dahulu, yaitu dengan mencari daerah asal, mengecek kesimetrian, dan titik potong grafik dengan sumbu koordinat. Berdasarkan analisis perhitungan yang telah dilakukannya, S2 menemukan bahwa daerah asal fungsi pada interval $(-\infty, \infty)$, S2 menemukan bahwa $f(-x) \neq f(x)$ dan kemudaian dia menyatakan bahwa grafik fungi $f(x)$ tidak simetri terhadap sumbu titik asal koordinat (0,0) maupun sumbu Y. S2 berusahan mencari titika potong grafik terhadap sumbu X, namun S2 belum menemukan titik potongnya. Adapun jawaban S2 diperlihatkan pada gambar 5 di bawah ini.



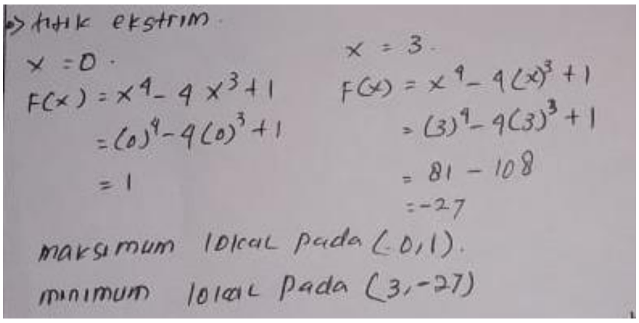
Gambar 5. Analisis pra kalkulus yang dilakukan S2

Setelah melakukan analisis pra kalkulus S2 juga sudah melakukan analisis kalkulus untuk menggambar grafik fungsi $f(x)$. S2 pertama tama mencari daerah dimana fungsi naik, turun, dan titik stasioner. Untuk itu S2 melakukan uji turunan pertama, dimana S2 memperoleh hasil turunan pertama yaitu $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$. Kemudian S2 memasukkan nilai $f'(x) = 0$ diperoleh $x = 0$ dan $x = 3$. S1 pada akhirnya menyimpulkan bahwa fungsi naik pada interval $(3, \infty)$ dan fungsi turun pada $(-\infty, 0)$ atau $(0,3)$ sedangkan titik stasioner yaitu saat $x = 0$ atau $x = 3$. Adapun jawaban S2 diperlihatkan pada gambar 6 di bawah ini.



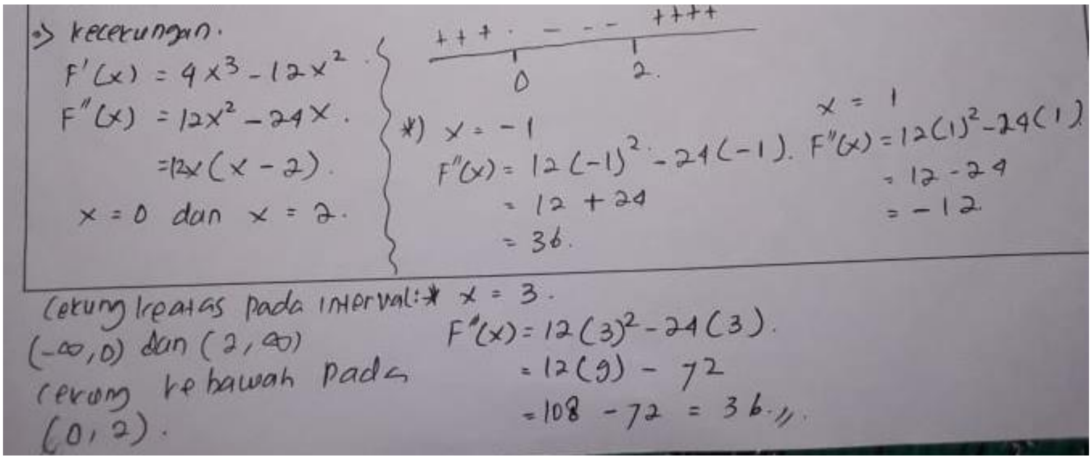
Gambar 6. Analisis kalkulus S2 mencari interval fungsi naik, turun, dan titik stasioner

Setelah mencari interval diman fungsi naik dan turun, S2 titik ekstrim, yaitu titik maksimum dan minimum lokal. Berdasarkan hasil perhitungan yang telah dilakukkannya, S2 memperoleh bahwa titik ekstrim (titik maksimum dan minimum local) yaitu $(0,1)$ titik maksumum local dan $(3, -27)$ minimum local. Adapun jawaban S2 diperlihatkan pada gambar 7 di bawah ini.



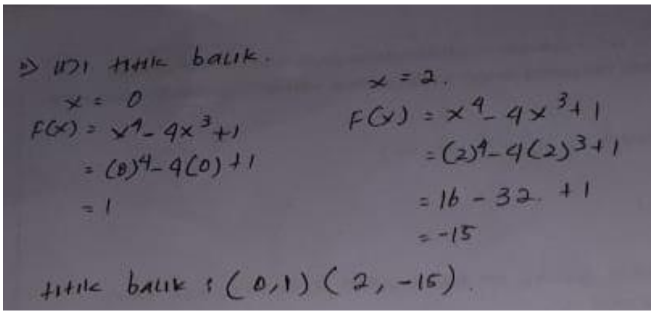
Gambar 7. Titik Ekstrim yang diperoleh S2

Setelah mencari interval diman fungsi naik dan turun, S2 kemudian mencari kecekungan fungsi. Hal ini dilakukan S2 dengan mencari turunan kedua yaitu dengan mendeferensialkan sekali lagi turunan pertama yang sudah diperolehnya, S2 mendapatkan bahwa $f''(x) = 12x^2 - 24x$. Kemudian S2 memasukkan nilai $f''(x) = 0$ dan melakukan operasi aljabar diperoleh $x = 0$ atau $x = 2$. S2 kemudian menguji tanda nilai $x = -1$ dan $x = 1$. Hasil operasi aljabar yang sudah dilakukan menghasilkan bahwa untuk interval $(-\infty, 0)$ bertanda positif, interval $(0,2)$ bertanda negatif, dan interval $(2, \infty)$ bertanda positif. Oleh karena itu S2 menyimpulkan bahwa grafik fungsi f cekung ke atas pada interval $(-\infty, 0)$ atau $(2, \infty)$ dan cekung ke bawah pada interval $(0,2)$. Adapun jawaban S2 diperlihatkan pada gambar 8 di bawah ini.



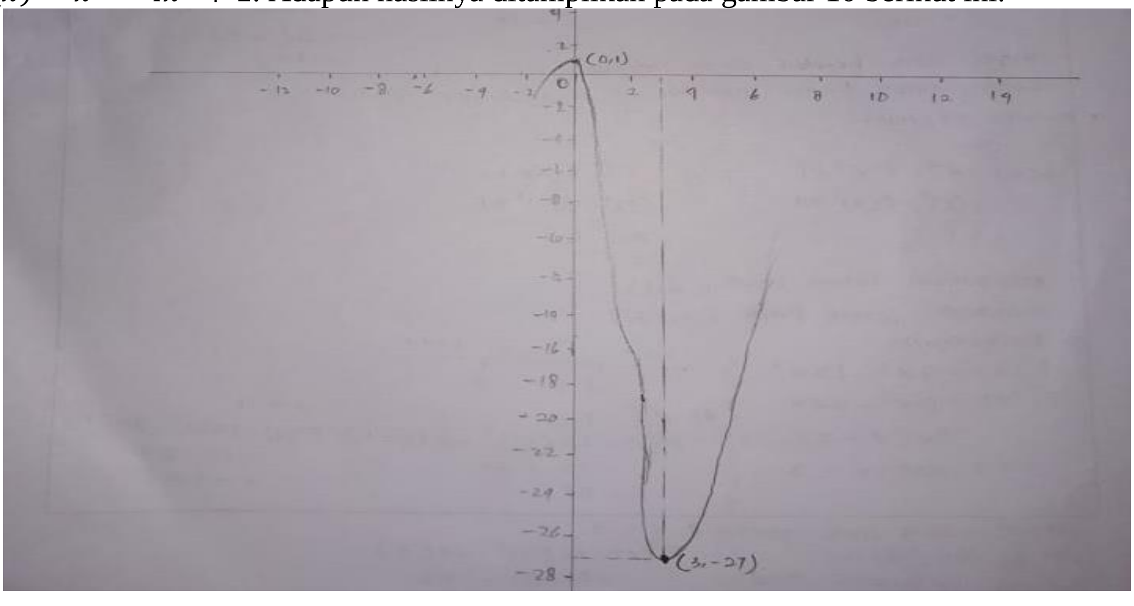
Gambar 8. Analisis kalkulus S1 mencari kecekungan fungsi

Setelah mencari kecekungan fungsi, S2 selanjutnya mencari titik balik. Dari hasil perhitungan yang telah dilakukan diperoleh titik balik fungsi yaitu (0,1) dan (2,15). Adapun hasil operasi aljabar yang dilakukan seperta pada gambar 9 berikut ini.



Gambar 9. Titik balik fungsi yang diperoleh S2

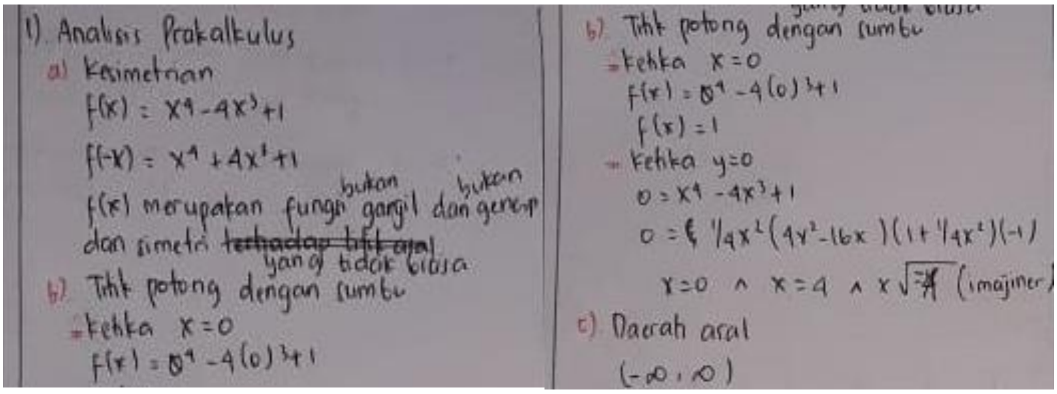
Berdasarkan analisis pendahuluan yang sudah dilakukannya ini, akhirnya S2 menggambarkan grafik fungsi $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$. Adapun hasilnya ditampilkan pada gambar 10 berikut ini.



Gambar 10. Grafik fungsi $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$ yang digambar S2

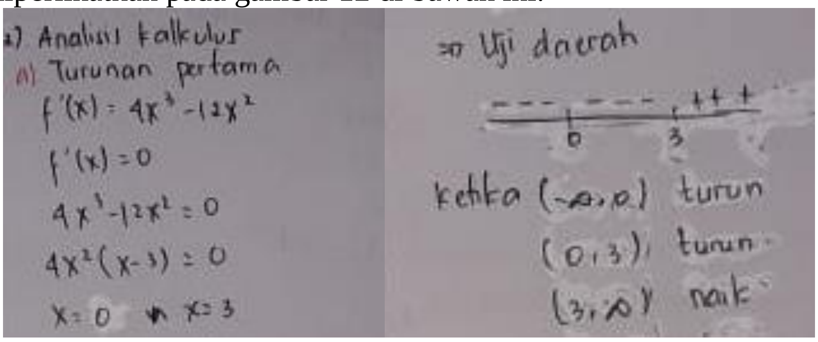
c. Hasil S3 dalam mengkonstruksi grafik fungsi dengan menggunakan kalkulus

Sebelum menggambar grafik fungsi, S3 melakukan analisis pra kalkulus terlebih dahulu, yaitu mencari kesimetrian, titik potong grafik dengan sumbu koordinat, dan daerah asal. Berdasarkan analisis perhitungan yang telah dilakukannya, S3 menemukan bahwa daerah asal fungsi pada interval $(-\infty, \infty)$, S3 menemukan bahwa $f(-x) \neq f(x)$ dan kemudaian dia menyatakan bahwa fungi $f(x)$ bukan fungsi ganjil dan juga bukan fungsi genap sehingga tidak simetri terhadap sumbu titik asal koordinat (0,0) maupun sumbu Y. S3 mencari titika potong grafik terhadap sumbu Y yaitu saat nilai $x = 0$ diperoleh $y = 1$ sehingga titik potongnya $(0,1)$, namun S3 juga mencari titik potong terhadap sumbu X yaitu saat $y = 0$ diperoleh nilai $x = 0, x = 4, x = imaginer$. Adapun jawaban S3 diperlihatkan pada gambar 11 di bawah ini.



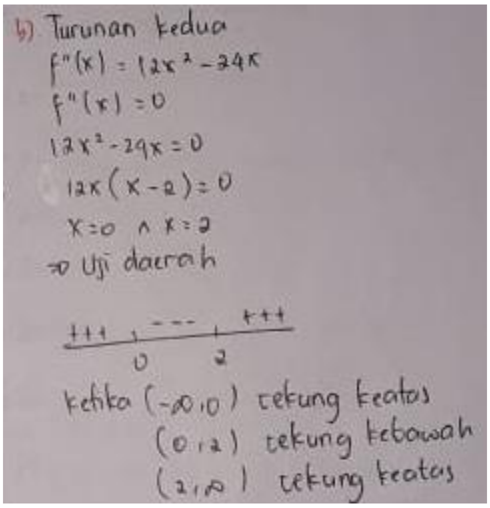
Gambar 11. Analisis pra kalkulus yang dilakukan S3

Setelah melakukan analisis pra kalkulus S3 juga sudah melakukan analisis kalkulus untuk menggambar grafik fungsi $f(x)$. S3 pertama tama mencari daerah dimana fungsi naik dan turun. Untuk itu S3 melakukan uji turunan pertama, dimana S3 memperoleh hasil turunan pertama yaitu $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$. Kemudian S3 memasukkan nilai $f'(x) = 0$ diperoleh $x = 0$ dan $x = 3$. S1 pada akhirnya menyimpulkan bahwa fungsi naik pada interval $(3, \infty)$ dan fungsi turun pada $(-\infty, 0)$ atau $(0,3)$. Adapun jawaban S3 diperlihatkan pada gambar 12 di bawah ini.



Gambar 12. Analisis kalkulus S3 mencari interval fungsi naik dan turun

Setelah mencari interval diman fungsi naik dan turun, S3 kemudian mencari kecekungan fungsi. Hal ini dilakukan S3 dengan mencari turunan kedua yaitu dengan mendeferensialkan sekali lagi turunan pertama yang sudah diperolehnya, S2 mendapatkan bahwa $f''(x) = 12x^2 - 24x$. Kemudian S3 memasukkan nilai $f''(x) = 0$ dan melakukan operasi aljabar diperoleh $x = 0$ atau $x = 2$. S3 kemudian menyimpulkan bahwa untuk interval $(-\infty, 0)$ bertanda positif, interval $(0,2)$ bertanda negatif, dan interval $(2,\infty)$ bertanda positif. Oleh karena itu S3 menyimpulkan bahwa grafik fungsi f cekung ke atas pada interval $(-\infty,0)$ atau $(2,\infty)$ dan cekung ke bawah pada interval $(0,2)$. Adapun jawaban S3 diperlihatkan pada gambar 13 di bawah ini.


b) Turunan kedua

$f''(x) = 12x^2 - 24x$

$f''(x) = 0$

$12x^2 - 24x = 0$

$12x(x-2) = 0$

$x = 0 \wedge x = 2$

$\Rightarrow$ Uji daerah

+++ | --- | +++

0 2

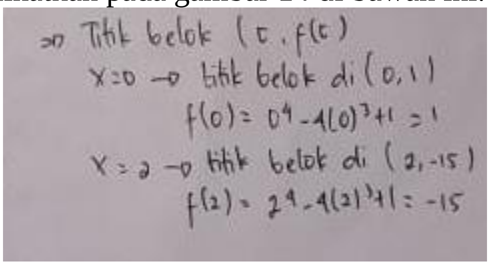
ketika $(-\infty,0)$ cekung keatas

$(0,2)$ cekung kebawah

$(2,\infty)$ cekung keatas

Gambar 13. Analisis kalkulus S3 mencari kecekungan fungsi

Setelah mencari kecekungan, S3 selanjutnya mencari titik belok grafik fungsi f. Berdasarkan hasil perhitungan yang telah dilakukan diperoleh bahwa grafik fungsi mempunyai titik belok di (0,1) atau $(2,-15)$. Adapun jawaban S3 diperlihatkan pada gambar 14 di bawah ini.


$\Rightarrow$ Titik belok $(c, f(c))$

$x = 0 \rightarrow$ titik belok di $(0,1)$

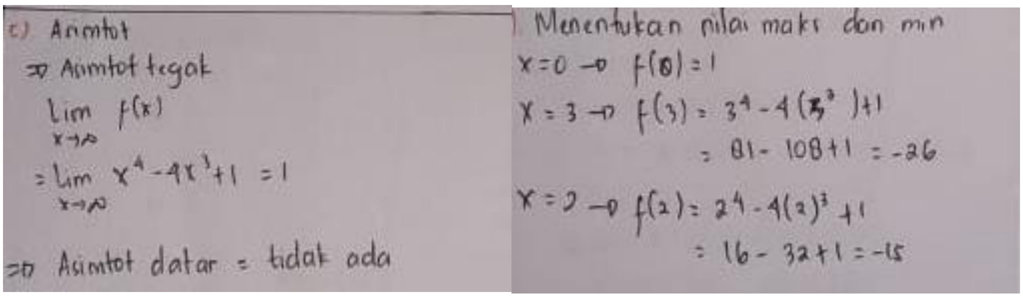
$f(0) = 0^4 - 4(0)^3 + 1 = 1$

$x = 2 \rightarrow$ titik belok di $(2,-15)$

$f(2) = 2^4 - 4(2)^3 + 1 = -15$

Gambar 14. Titik belok yang diperoleh S3

Langkah selanjutnya yang dilakukan oleh S3 yaitu mencari asimtot seerta nilai maksimum dan minimum fungsi, Dari hasil perhitungan yang telah dilakukan diperoleh bahwa asismto tegak saat $x = 1$ dan tidak ada asimtot datar. Sedangkan maksimum dan minimum local diperoleh saat $x = 0, x = 3$ dan $x = 2$. Adapun hasil operasi aljabar yang dilakukan seperta pada gambar 15 berikut ini.


c) Asimtot

$\Rightarrow$ Asimtot tegak

$\lim_{x\to\infty} f(x)$

$= \lim_{x\to\infty} x^4 - 4x^3 + 1 = 1$

$\Rightarrow$ Asimtot datar = tidak ada

Menentukan nilai maks dan min

$x = 0 \rightarrow f(0) = 1$

$x = 3 \rightarrow f(3) = 3^4 - 4(3^3) + 1$

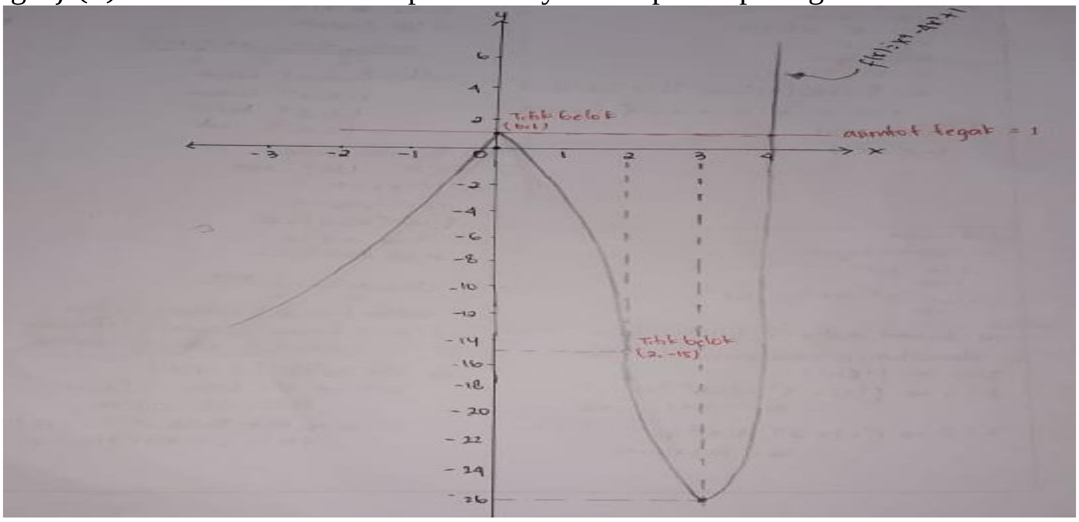
$= 81 - 108 + 1 = -26$

$x = 2 \rightarrow f(2) = 2^4 - 4(2)^3 + 1$

$= 16 - 32 + 1 = -15$

Gambar 15. Asimtot serta nilai maksimum dan minimum yang diperoleh S3.

Berdasarkan analisis pendahuluan yang sudah dilakukannya tersebut, akhirnya S3 menggambarkan grafik fungsi $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$. Adapun hasilnya ditampilkan pada gambar 16 berikut ini.



Gambar 16. Grafik fungsi $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$ yang digambar S3

Pembahasan

S1 melakukan analisis pra kalkulus dan kalkulus sebelum menggamar grafik. Hal ini sudah sesuai dengan perintah soal. Akan tetapi dalam melekukan analisis pendahuluan ini masih mempunyai beberapa kekeliruan yang menyebabkan grafik yang digambar menjadi tidak tepat. S1 masih melakukan kesalahan konsep fungsi ganjil. Dimana S1 mengatakan bahwa jika suatu fungsi $f(x) \neq f(-x)$ maka pasti $f(x)$ fungsi ganjil. Padahal menurut Varberg, Purcelle, dan Rigdon (2006 : 31-32) bahwa jika suatu fungsi $f(x) = f(-x)$ maka fungsinya disebut fungsi genap dan grafiknya simetri terhadap sumbu Y. Sedangakan jika suatu fungsi $f(x) = -f(x)$ maka fungsinya disebut fungsi ganjil dan grafiknya simetri terhadap titik asal $(0,0)$. S1 memahamai pernyataan tersebut berarti bahwa jika $f(x) \neq f(-x)$ maka fungsinya bukan fungsi genap dan jika bukan fungsi genap harusla fungsi tersebut fungsi ganjil. Dengan demikian maka S1 menuliskan bahwa grafik fungsinya simetri terhadap titik asal (fungsi ganjil). Dalam hal ini S1 memahami memahami bahwa suatu fungsi pasti termasuk fungsi genap atau fungsi ganjil tetapi tidak keduanya.

S1 juga sudah mencari titik potong grafik dengan sumbu koordinat. Titik potong terhadap sumbu Y sudah benar, akan tetapi titik potong dengan sumbu X masih belum tepat. S1 menggunakan rumus kuadra untuk memecahkan persamaan $x^4 - 4x^3 + 1 = 0$. Padahal persamaan tersebut berpangkat empat. Mencari solusi persamaan $x^4 - 4x^3 + 1 = 0$ memang tidak mudah. Akan tetapi ada alternative lain yaitu dengan menguji nilai tertentu. Misal dengan memasukkan nilai $x = 1$, diperoleh $f(x)$ negative, $x = 5$ diperoleh nilai $f(x)$ positif dan untuk nilai $x = 0$ juga bernailai positif. Sehingga akan dapat ditebak bahwa titik potong grafik dengan sumbuk X akan berada di antara $x = 0$ dan $x = 1$ atau $x = 4$.

S1 masih melakukan kesalahan dalam menentukan interval fungsi naik dan turun. Dimana S1 menyatakan bahwa fungsi naik pada interval $(-\infty, 0)$ atau $(3, \infty)$ dan fungsi turun pada $(0,3)$. Padahal seharusnya fungsi naik pada $(3, \infty)$ dan turun pada interval $(-\infty, 0)$ atau $(0,3)$. Hal ini terjadi karena S1 tidak menghitung secara cermat untuk nilai $x < 0$. Berdasarkan hasil wawancara dengan S1, diketahui bahwa S1 hanya menguji tanda untuk daerah $(0,3)$ dan diperoleh hasilnya negative. Berdasarkan hal itu S1 menyimpulkan bahwa daerah interval selalu bertanda positif dan negative secara berurutan. Sedangkn titik untuk nilai $x = 0$ dan $x = 3$ merupakan titik stasioner.

S1 juga mencari daerah kecekungan fungsi, yang dilakukan dengan mencari turunan kedua fungsi $f(x)$. Kemudian memasukkan nilai turunan kedua sama dengan nol. Sehingga diperoleh bahwa fungsi f cekung ke atas pada interval $(-\infty, 0)$ atau $(2, \infty)$. Sedangkan grafik fungsi f cekung ke bawah pada interval $(0, 2)$. Hasil yang diperoleh S1 sudah benar. Hal ini menunjukkan bahwa S1 sudah memahami konsep turunan kedua dan hubungannya dengan kecekungan grafik. S1 juga sudah benar dalam melakukan operasi alajbar untuk mencari kecekungan fungsi.

Berdasarkan analisis yang telah dilakukakannya S1 kemudian menggambar grafik fungsi $f(x)$. Akan tetapi karena dari analisis pendahuluan yang dilakukan masih terdapat kekeliruan mengakibatkan grafik fungsi yang digambar pun menjadi tidak tepat. S1 tidak menggunakan informasi dari analisis pendahuluan yang telah dilakukan dalam menggambar grafik fungsi. Hal ini terlihat bahwa ada ketidak sesuaian hasil dari analisis pendahuluan dengan grafik fungsi yang dihasilkan. Seperti terlihat pada gambar grafik fungsi yang dihasilkan 1, tampak bahwa grafik fungsi memotong sumbu Y di titik $(0,0)$. Padahal pada analisis pendahuluan yang telah dilakukkannya S1 menyebutkan bahwa titik potong terhadap sumbu Y itu di titik $(0,1)$. Demikian juga untuk kecekungan fungsi, S1 sudah benar menyatakan bahwa dianalis pendahuluannya grafik fungsi f cekung ke atas pada interval $(-\infty, 0)$ atau $(2, \infty)$. Sedangkan grafik fungsi f cekung ke bawah pada interval $(0, 2)$. Sedangkan pada gambar grafik yang dikonstruknya tampak bahwa grafik fungsi cekung ke atas untuk semua nilai x atau pada interval $(-\infty, \infty)$.

S2 melakukan analisis pra kalkulus dan kalkulus sebelum menggamar grafik. Hal ini sudah sesuai dengan perintah soal. Analsisis pendahuluan yang dilakukan oleh S2 untuk daerah asal pada interval $(-\infty, \infty)$ sudah benar. S2 sudah memahami bahwa fungsi yang diberikan merupakan fungsi polynomial, sehingga daerah asalnya mencakup seluruh bilangan real. S2 juga sudah mencari kesimetrian grafik fungsi terhadap fungsi sumbu Y dan titik asal. Hasil operasi aljabar yang dilakukannya menunjukkan bahwa fungsi $f(x)$ bukan fungsi genap maupun fungsi ganjil. Oleh karena itu grafik fungsinya tidak simetri terhadap titik asal maupun terhdap sumbu Y.

S2 juga sudah berusaha mencari titik potong grafik dengan sumbu koordinat. Titik potong terhadap sumbu Y lupa dituliskannya, akan tetapi S2 sudah memahami bahwa titik potong terhadap sumbu Y ketika $x = 0$ yang menghasilkan titik $(0,1)$. Hal ini di dukung oleh grafik yang dikonstruk oleh S2, dari grafik tampak bahwa titik potong terhadap sumbu Y di titik $(0,1)$. Titik potong terhadap sumbu X masih belum ditemukan oleh S2. Hal ini disebabkan S2 belum dapat menemukan solusi dari peramaan $x^4 - 4x^3 + 1 = 0$. Persamaan ini merupakan polynomial berderajat empat. Sehingga tidak dapat dengan mudah diselesaikan. Akan tetapi ada alternative lain yaitu dengan menguji nilai tertentu. Misal dengan memasukkan nilai $x = 1$, diperoleh $f(x)$ negative, $x = 5$ diperoleh nilai $f(x)$ positif dan untuk nilai $x = 0$ juga bernailai positif. Sehingga akan dapat ditebak bahwa titik potong grafik dengan sumbuk X akan berada di antara $x = 0$ dan $x = 1$ atau $x = 4$.

S2 sudah benar dalam menentukan interval dimana fungsi naik dan turun. Hal ini berarti S2 sudah memahami konsep turunan pertama dan hubungannya dengan grafik fungsi, dalam hal ini fungsi naik dan turun. Hasil operasi aljabar yang sudah dilakukannya menunjukkan bahwa grafik fungsi naik pada interval $(3, \infty)$ dan turun pada interval $(-\infty, 0)$ atau $(0,3)$. Meskipun interval ini membagi bilangan real menjadi 3 interval, tidak mengarahkan S2 untuk menjawab bahwa interval yang berdekatan selalu bertanda sama. Akan tetapi S2 langsung menguji tanda pada masing-masing interval. Hal tersebut tentu menjadi sangat akurat, sehingga jawaban yang diberikan S2 pun benar. Sedangkan titik untuk nilai $x = 0$ atau $x = 3$ merupakan titik stasioner. Oleh karena titik tersebut merupakan titik stasioner. Hal tersebut yang mendasari S2 tidak menggabungkan langsung interval $(-\infty, 0)$ atau $(0,3)$ menjadi $(-\infty, 3)$. S2 juga mencari titik ekstrim, yaitu titik maksimum dan minimum local. Berdasarkan hasil operasi aljabar yang telah dilakukannya S2 menyimpulkan bahwa titik maksimum local $(0,1)$ dan minimum local

$(3, -27)$. Akan tetapi titik maksimum local $(0,1)$ menjadi tidak tepat. Hal ini dikarenakan fungsi turun pada interval $(-\infty, 0)$ atau $(0,3)$. Oleh karena itu tidak akan mungkin nilai $f(x)$ untuk $x = 0$ lebih tinggi daripada nilai $f(x)$ untuk $x = -1$. Titik $(0,1)$ bukan maksimum local tetapi merupakan titik balik. Suatu titik balik akan menjadi titik maksimum atau minimum local jika interval yang berada di kedua sisi titik balik berlawanan tanda. Akan tetapi jika jika interval yang berada di kedua sisi titik balik mempunyai tanda yang sama hanya menjadi titik balik.

S2 juga mencari daerah kecekungan fungsi, yang dilakukan dengan mencari turunan kedua fungsi $f(x)$. Kemudian memasukkan nilai turunan kedua sama dengan nol. Sehingga diperoleh bahwa fungsi f cekung ke atas pada interval $(-\infty, 0)$ atau $(2, \infty)$. Sedangkan grafik fungsi f cekung ke bawah pada interval $(0, 2)$. Hasil yang diperoleh S2 sudah benar. Hal ini menunjukkan bahwa S2 sudah memahami konsep turunan kedua dan hubungannya dengan kecekungan grafik. S2 juga sudah benar dalam melakukan operasi aljabar untuk mencari kecekungan fungsi.

Titik balik yang diperoleh S2 sudah benar, yaitu $(0,1)$ dan $(2,15)$. Hal ini menjadi acauan bahwa titik balik belum tentu menjadi titik maksimum atau minimum local. Dengan demikian berarti bahwa S2 sudah memahami konsep turunan kedua dan hubungannya dengan kecekungan dan titik balik fungsi. Akan tetapi S2 belum mampu memahami bahwa titik balik itu tidak berarti menjadi titik maksimum atau minimum local.

Berdasarkan analisis yang telah dilakukakannya S2 kemudian menggambar grafik fungsi $f(x)$. Akan tetapi karena dari analisis pendahuluan yang dilakukan masih terdapat kekeliruan mengakibatkan grafik fungsi yang digambar pun menjadi tidak tepat. S2 tidak menggunakan informasi dari analisis pendahuluan yang telah dilakukan dalam menggambar grafik fungsi. Hal ini terlihat bahwa ada ketidak sesuaian hasil dari analisis pendahuluan dengan grafik fungsi yang dihasilkan. Grafik yang dihasilkan oleh S2 masih tidak sepenuhnya menggunakan hasil dari analisis pendahuluan yang telah dilakukannya. Analisis pendahuluan menyatakan bahwa grafik fungsi turun pada interval $(-\infty, 0)$ atau $(0,3)$ akan tetapi dari gambar 10 tampak bahwa grafik fungsi nya naik pada interval $(-\infty, 0)$ yang mengakibatkan titik $(0,1)$ menjadi titik maksimum local. Akan tetapi hal ini mendukung hasil studi pendahuluan yang tidak tepat bahwa $(0,1)$ merupakan titik maksimum local. S2 menggunakan dua informasi yang yang saling kontradiksi pada analisis pendahuluan yang telah dilakukakannya. Nilai minimum local juga tidak tepat, hal ini dikarenakan terjadi kesalahan dalam operasi aljbar. Seharusnya minimum local yaitu $(3, -26)$. Gambar yang dihasilkan oleh S2 masih kurang tepat akan tetapi sudah mendekati kebenaran.

S3 melakukan analisis pra kalkulus dan kalkulus sebelum menggamar grafik. Hal ini sudah sesuai dengan perintah soal. Analsisis pendahuluan yang dilakukan oleh S3 untuk daerah asal pada interval $(-\infty, \infty)$ sudah benar. S3 sudah memahami bahwa fungsi yang diberikan merupakan fungsi polynomial, sehingga daerah asalnya mencakup seluruh bilangan real. S3 juga sudah mencari kesimetrian grafik fungsi terhadap fungsi sumbu Y dan titik asal. Hasil operasi aljabar yang dilakukannya menunjukkan bahwa fungsi $f(x)$ bukan fungsi genap maupun fungsi ganjil. Oleh karena itu grafik fungsinya tidak simetri terhadap titik asal maupun terhdap sumbu Y.

S3 juga sudah berusaha mencari titik potong grafik dengan sumbu koordinat. Titik potong terhadap sumbu Y diperoleh saat $x = 0$ didapat $(0,1)$. S3 juga mencari titik potong terhadap sumbu X yaitu saat $y = 0$ diperoleh nilai $x = 0, x = 4, x = imaginer$. Hal ini menunjukkan bahwa S3 sudah memahami konsep titik potong dengan sumbu koordinat. Akan tetapi hasil operasi aljabar yang dilakukan S3 dalam menentukan titik potong terhadap sumbu X masiih krang tepat karena S3 masih belum mampu memecahkan persaman $x^4 - 4x^3 + 1 = 0$. Persamaan ini merupakan persamaan polynomial berderajat empat. Sehingga tidak mudah untuk diselesaiakan. Akan tetapi ada alternative lain yaitu dengan menguji nilai tertentu. Misal dengan memasukkan nilai $x = 1$, diperoleh $f(x)$ negative, $x = 5$ diperoleh nilai $f(x)$ positif dan untuk nilai $x = 0$ juga bernailai positif. Sehingga akan dapat ditebak bahwa titik potong grafik dengan sumbuk X akan berada di antara $x = 0$ dan $x = 1$ atau $x = 4$.

S3 sudah benar dalam menentukan interval dimana fungsi naik dan turun. Hal ini berarti S3 sudah memahami konsep turunan pertama dan hubungannya dengan grafik fungsi, dalam hal ini fungsi naik dan turun. Hasil operasi aljabar yang sudah dilakukannya menunjukkan bahwa grafik fungsi naik pada interval $(3, \infty)$ dan turun pada interval $(-\infty, 0)$ atau $(0,3)$. Meskipun interval ini membagi bilangan real menjadi 3 interval, tidak mengarahkan S3 untuk menjawab bahwa interval yang berdekatan selalu bertanda sama. Akan tetapi S3 langsung menguji tanda pada masing-masing interval. Hal tersebut tentu menjadi sangat akurat, sehingga jawaban yang diberikan S3 pun benar. Sedangkan titik untuk nilai $x = 0$ atau $x = 3$ merupakan titik stasioner. Oleh karena titik tersebut merupakan titik stasioner. Hal tersebut yang mendasari S3 tidak menggabungkan langsung interval $(-\infty, 0)$ atau $(0,3)$ menjadi $(-\infty, 3)$.

S3 juga mencari daerah kecekungan fungsi, yang dilakukan dengan mencari turunan kedua fungsi $f(x)$. Kemudian memasukkan nilai turunan kedua sama dengan nol. Sehingga diperoleh bahwa fungsi f cekung ke atas pada interval $(-\infty, 0)$ atau $(2, \infty)$. Sedangkan grafik fungsi f cekung ke bawah pada interval $(0, 2)$. Hasil yang diperoleh S3 sudah benar. Hal ini menunjukkan bahwa S2 sudah memahami konsep turunan kedua dan hubungannya dengan kecekungan grafik. S3 juga sudah benar dalam melakukan operasi aljabar untuk mencari kecekungan fungsi.

Titik balik yang diperoleh S3 sudah benar, yaitu $(0,1)$ dan $(2, -15)$. Dengan demikian berarti bahwa S3 sudah memahami konsep turunan kedua dan hubungannya dengan kecekungan dan titik balik fungsi. S3 juga mencari titik ekstrim, yaitu titik maksimum dan minimum yaitu dengan mencari niai $f(x)$ saat $= 0$, $x = 2$, dan $x = 3$. Berdasarkan hasil operasi aljabar yang telah dikukan S3 menyimpulkan bahwa $f(0) = 1, f(2) = -15, f(3) = -26$. Akan tetapi titik $(2, -15)$ bukan titik minimum local melainkan titik balik fungsi. Hal ini menunjukkan bahwa S3 masih belum memahami dengan tepat konsep titik balik. Titik balik akan menjai titik maksimum dan minimum local apabila tanda dari nilai turunan pertama di kedua sisi titik tersebut berlawanan. S3 juga mencari asimtot tegak dan datar. Namun hasil yang diperoleh S3 masih kurang tepat. Karena fungsi nya polynomial maka tidak ada asimtot datar maupun asimtot tegak.

Berdasarkan analisis yang telah dilakukakannya S3 kemudian menggambar grafik fungsi $f(x)$. Akan tetapi karena dari analisis pendahuluan yang dilakukan masih terdapat kekeliruan mengakibatkan grafik fungsi yang digambar pun menjadi tidak tepat. S3 tidak menggunakan informasi dari analisis pendahuluan yang telah dilakukan dalam menggambar grafik fungsi. Hal ini terlihat bahwa ada ketidak sesuaian hasil dari analisis pendahuluan dengan grafik fungsi yang dihasilkan. Grafik yang dihasilkan oleh S3 tidak sepenuhnya menggunakan hasil dari analisis pendahuluan yang telah dilakukannya. Analisis pendahuluan menyatakan bahwa grafik fungsi turun pada interval $(-\infty, 0)$ atau $(0,3)$ akan tetapi dari gambar 16 tampak bahwa grafik fungsi nya naik pada interval $(-\infty, 0)$ yang mengakibatkan titik $(0,1)$ menjadi titik maksimum local. Akan tetapi hal ini mendukung hasil studi pendahuluan yang tidak tepat bahwa $(0,1)$ merupakan titik maksimum local. S3 menggunakan dua informasi yang yang saling kontradiksi pada analisis pendahuluan yang telah dilakukakannya. S3 juga masih belum tepat dalam menyatakan bahwa $y = 1$ merupakan asimtot datar, padahal dari gambar 16 terlihat bahwa garis $y = 1$ memotong sumbu grafik f. Hal ini menunjukkan bahwa S3 masih belum memahami konsep asimtot.

Simpulan

1. Untuk mengkonstruksi grafik dengan menggunakan kalkulus diperlukan analis pra kalkulus dan analisis kalkulus. Hal ini bertujuan untuk memandu subjek dalam menggambar/melukis grafik fungsi dengan tepat.
2. Subjek penelitian masih mengalami beberpa kesalahan konsep dalam analisis prakalkulus dan kalkulus. Hal ini akan menyebabkan kesalahan dalam menggambar grafik.

3. Data hasil analisis tidak digunakan secara utuh oleh subjek penelitian ketika menggambar grafik fungsi

Saran

Adapun saran yang dapat diberikan adalah penelitian kedepan sebaiknya juga dilakukan penelitian tentang bagaiamana mengatasi kesalahan konsep mahasiswa dalam menggambar grafik fungsi.

UCAPAN TERIMA KASIH

Kami tim peneliti mengucapkan terima kasih kepada Dekan FKIP Universitas Bengkulu yang telah memberikan kesempatan kepada kami sebagai penerima hibah penelitian PPKP 2019. Kami juga mengucapkan terima kasih kepada ketua LPPM UNIB, tim rivewer dan monev PPKP FKIP UNIB, kepada mahasiswa S1 Pendidikan Matematika dan semua pihak yang telah membantu yang tidak dapat kami sebutkan satu persatu.

DAFTAR PUSTAKA

Blanton, M., Barbara, M.B., Katie, S.,& Ashley, N.O. (2015). A Learning Trajectory in 6-Year-Olds'Thinking About Generalizing Functional Relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, , 46 (5): 511 – 588

Darmadi. , (2017). Identifikasi Kesalahan Berpikir Visual Mahasiswa Dalam Menggambar Grafik Fungsi Real. *Math Didactic: Jurnal Pendidikan Matematika*, 3 (2), 140 – 144

Moleong. *Metodologi Penelitian Kualitatif*. Bandung: PT Remaja Rosda Karya, 2006

Nunung, Hidayati R. (2013). *Proses Berpikir Siswa dalam Memecahkan Masalah Program Linier dengan Pemberian Scaffolding*. Tesis. Tidak diterbitkan. PPs UM

Montiel, M., Vidakovic, D., & Kabael, T. (2008). Relationship between students' understanding of functions in Cartesian and polar coordinate systems. Investigations in Mathematics Learning, 1(2), 52–70.

Ocal, M.F. (2015). Asymptote Misconception on Graphing Functions: Does Graphing Software Resolve It?. *Malaysian Online Journal of Educational Technology*, 5 (1) : 21 – 33

Agustinsa, R. (2014). *Defragmenting Proses Berpikir melalui Pemetaan Kognitif untuk Memperbaiki Kesalahan Siswa dalam Memecahkan Masalah Proporsi* . Tesis. Tidak diterbitkan: Program Pascasarjana UM.

Rustam. (1995). *Proses Berpikir Siswa dalam Memahami Konsep Fungsi pada Siswa Kelas III.A.2 SMA Santun Untan Pontianak Tahun Ajaran 1994/1995*. Tesis. Tidak dipublikasikan. PPs UM

Siswono, Tatag Yuli Eko. (2002). Proses Berpikir Siswa dalam Pengajuan Soal. *Jurnal Nasional "MATEMATIKA, Jurnal Matematika atau Pembelajarannya, 7*, 44-50.

Stalvey, H. E., & Vidakovic, D. (2015). Students' reasoning about relationships between ariables in a real-world problem. *The Journal of Mathematical Behavior*, 40, 192–210.

Subanji. (2007). *Proses Berpikir Penalaran Kovarisional Psudo Dalam Mengkonstruksi Grafik Fungsi Kejadian Dinamika Berkebalikan*. Disertasi. Tidak diterbitkan: Program Pascasarjana UNESA.

Varbereg, D., Purcell, E.J., & Rigdon, S.E. (2007). Kalkulus Edisi 9 Terjemahan. Jakarta: Erlangga.