



Analisa Kestabilan Bebas Penyakit Model SITRS pada Penyebaran Diare

Ratna Widayati^{1*}, Renal Hamim Muntoha¹, Umi Ma'rifah¹, Nita Yulianti¹

¹ Prodi Matematika, Universitas Nahdlatul Ulama Al Ghazali Cilacap, Indonesia

* Corresponding Author Email: ratnawidayati1708@gmail.com

Article Information

Article History:

Submitted: 04 28 2024

Accepted: 05 07 2024

Published: 06 30 2024

Key Words:

Diarrhea

SITRS

Stability

DOI:

<https://10.33369/diophantine.v3i1.33908>

Abstract

This study discusses the spread of diarrhea accompanied by complications resulting in death among sufferers. It is assumed that people with diarrhea can transmit the disease to susceptible individuals. Additionally, deaths occurred due to diarrhea when treatment was not administered. Individuals who have contracted diarrhea may acquire temporary immunity and then become susceptible again. The model used is SITRS, which yields disease-free equilibrium points and endemic equilibrium points. The examination revolved around the disease-free equilibrium point, and the conclusion drawn was that this point exhibits local asymptotic stability when \mathfrak{R}_0 is less than 1. Moreover, according to the simulation findings, it is demonstrated that the model's outcome converges toward a disease-free equilibrium point when \mathfrak{R}_0 is less than 1. This implies that diarrhea will disappear from the population at some point if the infection level \mathfrak{R}_0 is less than 1 is met.

1. PENDAHULUAN

Diare merupakan penyakit yang ditandai dengan intensitas buang air besar yang tinggi dengan feses yang cair atau lunak. Penyakit diare kadang disertai dengan perut kembung dan kram perut [1]. Jenis bakteri yang menyebabkan diare antara lain *Salmonella*, *Escheria Colli*, *Shigella* dan *Campylobacter*. Bakteri-bakteri tersebut dapat ditemukan pada sayuran dan buah yang dikonsumsi oleh manusia dengan tidak dicuci bersih. Selain itu, bakteri-bakteri tersebut dapat ditemukan pula pada telur dan daging yang dimasak setengah matang atau bahkan mentah, sedangkan khusus untuk bakteri *Shigella* dapat ditemukan pada air dan makanan yang kotor akibat lingkungan yang kurang bersih.

Curah hujan yang tinggi menyebabkan peningkatan wabah diare sebagai akibat dari kontaminasi distribusi air [2]. Ketika terjadi curah hujan yang tinggi, genangan air dapat membawa kontaminan dari berbagai sumber seperti limbah atau polutan lainnya ke dalam sistem distribusi air. Air yang tercemar ini bisa mengalir ke sumber air minum, yang kemudian meningkatkan risiko penyakit yang dapat ditularkan melalui air seperti diare.

Terdapat dua jenis diare yaitu diare menular dan diare tidak menular [1]. Diare menular disebabkan oleh virus, parasit atau bakteri penghasil racun, sedangkan diare tidak menular disebabkan oleh racun misalnya keracunan makanan. Jenis diare ini tidak menular dari individu satu ke individu lain [3,4]. Selain itu, kekebalan yang terbentuk setelah terjadi infeksi cenderung bersifat sementara, dan infeksi ulang biasanya tidak seberat infeksi asli yang dialami sebelumnya.

Diare merupakan salah satu penyakit berbahaya yang banyak menyerang anak-anak di bawah usia lima tahun [5] dan menyebabkan kematian tertinggi ketiga dari total kematian di seluruh dunia. Berdasarkan literatur [5], diperkirakan 1,8 juta orang meninggal setiap tahun. Diare dapat bersifat akut jika berlangsung selama 2 minggu dan menjadi kronis jika berlangsung lebih dari 2 minggu. Komplikasi yang sering terjadi adalah dehidrasi [3]. Hal ini menjadi faktor penyebab kematian karena cairan tubuh yang terkuras habis.

Penularan diare terjadi melalui feses orang yang terkontaminasi bakteri-bakteri penyebab diare yang dibawa oleh lalat ataupun serangga lainnya. Selain itu, penularan dapat terjadi melalui kontaminasi limbah atau air kotor pada air bersih yang dikonsumsi. Oleh karena itu, perlu dilakukan penelitian mengenai dinamika penyebaran penyakit diare, sehingga dapat dilakukan pencegahan terhadap bahaya yang ditimbulkan.

Penelitian [6] membahas mengenai model matematika penyebaran penyakit diare dengan adanya *treatment*. Pada penelitiannya, [6] membagi populasi menjadi 4 kelas dengan mengasumsikan tidak ada kematian karena diare. Selain itu, literatur [6] mengasumsikan bahwa individu yang telah sembuh dari diare, tidak kembali rentan artinya individu tersebut menjadi kebal terhadap penyakit diare. Selanjutnya literatur [7] membahas mengenai dinamika penyebaran penyakit diare dengan vaksin. Pada penelitiannya, [7] membagi populasi menjadi 4 kelas yaitu S (*Susceptible*), V (*Vaccinated*), E (*Exposed*), I (*Infected*). Akan tetapi, literatur [7] tidak mendefinisikan kelas R yaitu populasi individu yang telah sembuh dari penyakit diare. Kemudian literatur [8] membahas mengenai pemodelan matematika diare dengan vaksinasi dan faktor perawatan. Penelitian [8] membagi kelas populasi menjadi 5 dengan mengasumsikan individu yang telah sembuh dari diare dapat kembali menjadi rentan diare. Pada penelitiannya, [8] mengelompokkan individu yang diberikan vaksin diare. Akan tetapi, vaksin yang ada tidak mengurangi angka *basic reproduction number* dengan signifikan. Selanjutnya penelitian literatur [9] yang membahas mengenai model matematika penyebaran diare dengan vaksin. Penelitian [9] mengasumsikan individu yang rentan dapat diberi vaksin diare. Analisis sensitivitas pada *basic reproduction number* dan simulasi dilakukan [9] dengan nilai parameter tertentu. Akan tetapi, literatur [9] tidak melakukan analisa kestabilan lokal dengan nilai eigen ataupun dengan kriteria *Routh Hurwitz* mengakibatkan kesimpulan yang diperoleh berdasarkan angka-angka tertentu saja.

Berdasarkan hal tersebut, pada penelitian ini akan dibahas mengenai dinamika penyebaran penyakit diare dengan mengasumsikan terdapat kelas R yaitu populasi individu yang sembuh dari diare, dan terdapat kematian karena penyakit diare. Selain itu, pada penelitian ini diasumsikan individu yang telah sembuh dari diare, dapat kembali terkena penyakit diare dengan kembali ke kelas rentan. Analisa kestabilan lokal dilakukan pada penelitian ini disertai simulasi numerik pada nilai-nilai parameter tertentu.

2. METODE

Penelitian ini adalah jenis penelitian literatur terapan di mana penelitian sebelumnya dijelajahi sebagai landasan untuk asumsi yang disajikan dalam model. Asumsi-asumsi ini digunakan untuk menyederhanakan model berdasarkan model yang sebenarnya. Objek studi dalam penelitian ini adalah individu dalam populasi yang telah didefinisikan, serta hubungannya di antara subpopulasi-subpopulasi yang berbeda.

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini meliputi:

a. Studi Literatur

Studi literatur dilakukan pada artikel-artikel mengenai penyakit diare. Bagaimana ciri khas dari penyakit diare, bagaimana pola penyebarannya dan kemungkinan-kemungkinan populasi yang akan terlibat dalam penyebaran diare dipelajari dalam tahap ini.

b. Pemodelan Matematika

Pada tahap ini, dilakukan pembentukan model matematika berupa sistem persamaan diferensial dengan menggunakan informasi-informasi yang relevan pada penyakit diare. Informasi-informasi tersebut dijadikan asumsi guna menyederhanakan model.

c. Mencari Titik Ekuilibrium dari Model Matematika

Berdasarkan model matematika yang diperoleh, dilakukan pencarian titik ekuilibrium dan dibuktikan pula eksistensi dari titik ekuilibrium tersebut.

d. Menganalisa Model Matematika

Analisa model dilakukan dengan menggunakan teori kestabilan nilai eigen.

e. Melakukan Simulasi Numerik dan menginterpretasikan hasil

Pada tahap akhir, dilakukan simulasi numerik pada nilai-nilai parameter tertentu dengan menggunakan program *Maple*. Kemudian dilakukan interpretasi hasil guna mengetahui sifat solusi dari model penyebaran penyakit diare.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Formulasi Model

Pada model SITRS, populasi terbagi menjadi empat kategori (kelas) sebagaimana dijelaskan dalam tabel berikut:

Tabel 1. Kelas populasi pada model SITRS

| | |
|--------|--|
| $S(t)$ | Populasi individu yang rentan terinfeksi diare pada saat t |
| $I(t)$ | Populasi individu yang terinfeksi diare pada saat t |
| $T(t)$ | Populasi individu terinfeksi diare yang menjalani pengobatan pada saat t |
| $R(t)$ | Populasi individu sembuh dari diare pada saat t |

Selanjutnya, dideskripsikan parameter yang mempengaruhi perubahan populasi pada model SITRS yang digunakan disajikan pada tabel berikut ini:

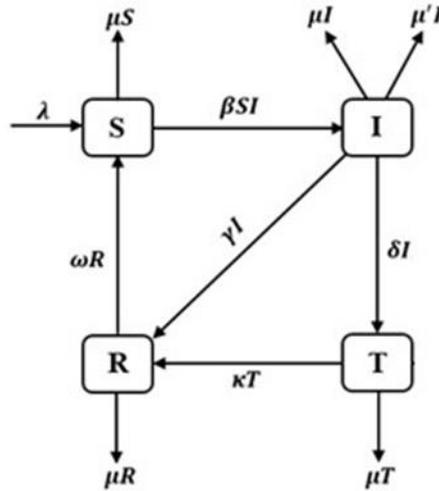
Tabel 2. Parameter pada model SITRS

| | |
|-----------|---|
| λ | Laju kelahiran |
| μ | Laju kematian alami |
| μ' | Laju kematian akibat terinfeksi diare |
| β | Laju kontak antara individu rentan dengan individu terinfeksi diare |
| γ | Laju kesembuhan individu yang terinfeksi diare tanpa pengobatan |
| δ | Laju pengobatan individu yang terinfeksi diare |
| κ | Laju kesembuhan individu terinfeksi diare yang menjalani pengobatan |
| ω | Laju individu yang sembuh dari infeksi diare menjadi individu yang rentan |

Semua nilai parameter dalam Tabel 2 dari model SITRS memiliki nilai positif. Beberapa asumsi yang digunakan dalam model SITRS antara lain:

- Bayi yang lahir masuk ke kelas rentan
- Terdapat kematian alami di setiap kelas
- Penularan diare hanya dapat terjadi pada individu yang rentan dan individu yang terinfeksi
- Terdapat kematian disebabkan diare pada individu yang terinfeksi
- Individu yang terinfeksi diare dapat sembuh dengan atau tanpa pengobatan
- Individu yang sembuh dari infeksi dapat menjadi rentan kembali

Berdasarkan asumsi-asumsi tersebut, diagram transfer dapat direpresentasikan pada gambar berikut ini.



Gambar 1. Diagram transfer model SITRS pada penyebaran diare

Berdasarkan diagram transfer pada Gambar 1, diperoleh model matematika penyebaran penyakit diare sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \lambda + \omega R - \mu S - \beta SI \tag{1a}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \mu I - \mu' I - \gamma I - \delta I \tag{1b}$$

$$\frac{dT}{dt} = \delta I - \mu T - \kappa T \tag{1c}$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I + \kappa T - \omega R - \mu R \tag{1d}$$

dengan total populasi $N(t) = S(t) + I(t) + T(t) + R(t)$ dengan $S, I, T, R \geq 0$ dan parameter $\lambda, \mu, \mu', \beta, \gamma, \delta, \kappa, \omega > 0$ sehingga diperoleh himpunan *invariant* positif

$$\Omega = \left\{ (S, I, T, R) \in \mathbb{R}^4 : 0 \leq S + I + T + R \leq \frac{\lambda}{\mu} \right\}.$$

3.2. Titik Ekuilibrium

Sistem (1) menghasilkan titik ekuilibrium yang dijelaskan dalam Lemma berikut.

Lemma 1.

(i). Jika $I = 0$ maka Sistem (1) mempunyai titik ekuilibrium bebas penyakit

$$E_0 = (S_0, I_0, T_0, R_0) = \left(\frac{\lambda}{\mu}, 0, 0, 0 \right).$$

(ii). Jika $I \neq 0$ maka Sistem (1) mempunyai titik ekuilibrium endemik $E_1 = (S_1, I_1, T_1, R_1)$ dengan

$$S_1 = \frac{\mu + \mu' + \gamma + \delta}{\beta},$$

$$I_1 = \frac{(\mu S_1 - \lambda)(\omega + \mu)(\mu + \kappa)}{\omega\gamma(\mu + \kappa) + \omega\kappa\delta - (\omega + \mu)(\mu + \kappa)\beta S_1},$$

$$T_1 = \frac{\delta}{(\mu + \kappa)} I_1,$$

$$R_1 = \frac{\gamma(\mu + \kappa) + \kappa\delta}{(\omega + \mu)(\mu + \kappa)} I_1.$$

Bukti.

- (i). Titik ekuilibrium dicapai ketika $\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dT}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0$, sehingga
- $$\lambda + \omega R - \mu S - \beta SI = 0 \tag{2a}$$
- $$\beta SI - \mu I - \mu' I - \gamma I - \delta I = 0 \tag{2b}$$
- $$\delta I - \mu T - \kappa T = 0 \tag{2c}$$
- $$\gamma I + \kappa T - \omega R - \mu R = 0 \tag{2d}$$

Jika $I = 0$, diperoleh $T = 0$ dari Persamaan (2c) karena $(\mu + \kappa) > 0$. Selanjutnya karena $I = 0$ dan $T = 0$ maka dari Persamaan (2d) diperoleh $R = 0$ karena $(\omega + \mu) > 0$. Berdasarkan Persamaan (2a), diperoleh

$$S = \frac{\lambda}{\mu},$$

sehingga diperoleh $E_0 = (S_0, I_0, T_0, R_0) = \left(\frac{\lambda}{\mu}, 0, 0, 0\right)$.

- (ii). Jika $I \neq 0$ Persamaan (2b) dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\beta SI - \mu I - \mu' I - \gamma I - \delta I = 0$$

$$I(\beta S - \mu - \mu' - \gamma - \delta) = 0.$$

Karena $I \neq 0$ maka

$$\beta S - \mu - \mu' - \gamma - \delta = 0$$

$$\beta S = \mu + \mu' + \gamma + \delta$$

$$S = \frac{\mu + \mu' + \gamma + \delta}{\beta}.$$

Selanjutnya Persamaan (2c) menjadi

$$\delta I = (\mu + \kappa) T$$

$$T = \frac{\delta}{(\mu + \kappa)} I.$$

Kemudian Persamaan (2d) menjadi

$$R = \frac{\gamma I + \kappa T}{(\omega + \mu)}$$

$$R = \frac{\gamma(\mu + \kappa) + \kappa\delta}{(\mu + \kappa)(\omega + \mu)} I.$$

Selanjutnya Persamaan (2a)

$$\lambda + \omega R - \mu S = \beta SI$$

$$I = \frac{\lambda + \omega R - \mu S}{\beta S}.$$

Dengan mensubstitusi S dan R pada I , diperoleh

$$I = \frac{(\mu S - \lambda)(\omega + \mu)(\mu + \kappa)}{\omega\gamma(\mu + \kappa) + \omega\kappa\delta - (\omega + \mu)(\mu + \kappa)\beta S}.$$

Jadi, diperoleh titik ekuilibrium endemik

$$S_1 = \frac{\mu + \mu' + \gamma + \delta}{\beta},$$

$$I_1 = \frac{(\mu S_1 - \lambda)(\omega + \mu)(\mu + \kappa)}{\omega\gamma(\mu + \kappa) + \omega\kappa\delta - (\omega + \mu)(\mu + \kappa)\beta S_1},$$

$$T_1 = \frac{\delta}{(\mu + \kappa)} I_1,$$

$$R_1 = \frac{\gamma(\mu + \kappa) + \kappa\delta}{(\omega + \mu)(\mu + \kappa)} I_1.$$

3.3. Basic Reproduction Number

Pada penelitian ini hanya dibahas mengenai *basic reproduction number* model SITRS untuk penyebaran penyakit diare. Pada model ini, kelas terinfeksi adalah kelas I dan T , sehingga persamaan diferensial yang digunakan adalah

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \mu I - \mu' I - \gamma I - \delta I$$

$$\frac{dT}{dt} = \delta I - \mu T - \kappa T$$

Basic reproduction number dicari menggunakan teknik NGM dengan mendefinisikan matriks

$$F = \begin{bmatrix} \beta SI \\ 0 \end{bmatrix}$$

dan

$$V = \begin{bmatrix} \mu I + \mu' I + \gamma I + \delta I \\ -\delta I + \mu T + \kappa T \end{bmatrix}$$

Selanjutnya matriks F dan V dilinearisasi di sekitar titik ekuilibrium bebas penyakit, sehingga diperoleh matriks

$$\mathbb{F} = \begin{bmatrix} \beta S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta\lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan

$$\Psi = \begin{bmatrix} \mu + \mu' + \gamma + \delta & 0 \\ -\delta & \mu + \kappa \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya *invers* dari matriks Ψ diperoleh

$$\begin{aligned} \Psi^{-1} &= \frac{1}{(\mu + \mu' + \gamma + \delta)(\mu + \kappa)} \begin{bmatrix} \mu + \kappa & \delta \\ 0 & \mu + \mu' + \gamma + \delta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\mu + \kappa}{(\mu + \mu' + \gamma + \delta)(\mu + \kappa)} & \frac{\delta}{(\mu + \mu' + \gamma + \delta)(\mu + \kappa)} \\ 0 & \frac{\mu + \mu' + \gamma + \delta}{(\mu + \mu' + \gamma + \delta)(\mu + \kappa)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{(\mu + \mu' + \gamma + \delta)} & \frac{\delta}{(\mu + \mu' + \gamma + \delta)(\mu + \kappa)} \\ 0 & \frac{1}{(\mu + \kappa)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Kemudian

$$\begin{aligned} \mathbb{F}\Psi^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{\beta\lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(\mu + \mu' + \gamma + \delta)} & \frac{\delta}{(\mu + \mu' + \gamma + \delta)(\mu + \kappa)} \\ 0 & \frac{1}{(\mu + \kappa)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\beta\lambda}{\mu(\mu + \mu' + \gamma + \delta)} & \frac{\beta\lambda\delta}{\mu(\mu + \mu' + \gamma + \delta)(\mu + \kappa)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Selanjutnya *basic reproduction number* merupakan nilai eigen terbesar dari matrik $\mathbb{F}\Psi^{-1}$, sehingga diperoleh

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{\beta\lambda}{\mu(\mu + \mu' + \gamma + \delta)}.$$

3.4. Eksistensi Titik Ekuilibrium Endemik

Lemma 2. Jika $\mathfrak{R}_0 > 1$ maka E_1 eksis.

Bukti.

Diketahui $E_1 = (S_1, I_1, T_1, R_1)$ dengan

$$S_1 = \frac{\mu + \mu' + \gamma + \delta}{\beta},$$

$$I_1 = \frac{(\mu S_1 - \lambda)(\omega + \mu)(\mu + \kappa)}{\omega\gamma(\mu + \kappa) + \omega\kappa\delta - (\omega + \mu)(\mu + \kappa)\beta S_1},$$

$$T_1 = \frac{\delta}{(\mu + \kappa)} I_1,$$

$$R_1 = \frac{\gamma(\mu + \kappa) + \kappa\delta}{(\omega + \mu)(\mu + \kappa)} I_1.$$

Akan dibuktikan $I_1 > 0$.

(i). Akan dibuktikan $(\mu S_1 - \lambda)(\omega + \mu)(\mu + \kappa) < 0$.

$$\begin{aligned} (\mu S_1 - \lambda)(\omega + \mu)(\mu + \kappa) &= \left(\mu \left(\frac{\lambda}{\mathfrak{R}_0 \mu} \right) - \lambda \right) (\omega + \mu)(\mu + \kappa) \\ &= \left(\left(\frac{\lambda}{\mathfrak{R}_0} \right) - \lambda \right) (\omega + \mu)(\mu + \kappa) \\ &= \left(\frac{\lambda}{\mathfrak{R}_0} - \frac{\mathfrak{R}_0 \lambda}{\mathfrak{R}_0} \right) (\omega + \mu)(\mu + \kappa) \\ &= \frac{\lambda}{\mathfrak{R}_0} (\omega + \mu)(\mu + \kappa) (1 - \mathfrak{R}_0). \end{aligned}$$

Karena $\mathfrak{R}_0 > 1$ maka terbukti $(\mu S_1 - \lambda)(\omega + \mu)(\mu + \kappa) < 0$.

(ii). Akan dibuktikan $\omega\gamma(\mu + \kappa) + \omega\kappa\delta - (\omega + \mu)(\mu + \kappa)\beta S_1 < 0$.

$$\begin{aligned} \omega\gamma(\mu + \kappa) + \omega\kappa\delta - (\omega + \mu)(\mu + \kappa)\beta S_1 &= \omega\gamma(\mu + \kappa) + \omega\kappa\delta - (\omega + \mu)(\mu + \kappa)\beta \left(\frac{\mu + \mu' + \gamma + \delta}{\beta} \right) \\ &= \omega\gamma(\mu + \kappa) + \omega\kappa\delta - (\omega + \mu)(\mu + \kappa)(\mu + \mu' + \gamma + \delta) \\ &= \mu\omega\gamma + \omega\gamma\kappa + \omega\kappa\delta - (\omega + \mu)(\mu + \kappa)(\mu + \mu' + \gamma + \delta) \\ &= -\mu\omega\mu - \mu\omega\mu' - \mu\omega\delta - \mu\mu\mu - \mu\mu\mu' - \mu\mu\gamma - \mu\mu\delta \\ &\quad - \kappa\omega\mu - \kappa\omega\mu' - \mu\kappa\mu - \mu\kappa\mu' - \kappa\mu\gamma - \mu\kappa\delta, \end{aligned}$$

karena $\lambda, \mu, \mu', \beta, \gamma, \delta, \kappa, \omega > 0$ maka terbukti $\omega\gamma(\mu + \kappa) + \omega\kappa\delta - (\omega + \mu)(\mu + \kappa)\beta S_1 < 0$.

Oleh karena itu, terbukti $I_1 > 0$. Karena $S_1 > 0$ dan $I_1 > 0$ maka $T_1 > 0$ dan $R_1 > 0$, sehingga E_1 eksis.

3.5. Analisa Kestabilan Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Pada penelitian ini, kestabilan lokal di sekitar titik ekuilibrium bebas penyakit dibahas melalui lemma yang berikut.

Lemma 3. Titik ekuilibrium bebas penyakit E_0 stabil asimtotik lokal jika $\mathfrak{R}_0 < 1$.

Bukti.

Matriks Jacobian di sekitar titik ekuilibrium E_0 dari Sistem (1) dinyatakan sebagai:

$$J_{E_0} = \begin{vmatrix} -\mu & -\beta\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) & 0 & \omega \\ 0 & \beta\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) - \mu - \mu' - \gamma - \delta & 0 & 0 \\ 0 & \delta & -\mu - \kappa & 0 \\ 0 & \gamma & \kappa & -\omega - \mu \end{vmatrix}.$$

Jika h menyatakan nilai eigen dari persamaan karakteristik yang dibentuk dari determinan matriks Jacobian diatas yaitu $|J_{E_0} - hI| = 0$, diperoleh

$$\begin{vmatrix} -\mu - h & -\beta\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) & 0 & \omega \\ 0 & \beta\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) - \mu - \mu' - \gamma - \delta - h & 0 & 0 \\ 0 & \delta & -\mu - \kappa - h & 0 \\ 0 & \gamma & \kappa & -\omega - \mu - h \end{vmatrix} = 0$$

$$(-\mu - h) \begin{vmatrix} \beta\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) - \mu - \mu' - \gamma - \delta - h & 0 & 0 \\ \delta & -\mu - \kappa - h & 0 \\ \gamma & \kappa & -\omega - \mu - h \end{vmatrix} = 0$$

$$(-\mu - h)(-\omega - \mu - h) \begin{vmatrix} \beta\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) - \mu - \mu' - \gamma - \delta - h & 0 \\ \delta & -\mu - \kappa - h \end{vmatrix} = 0$$

$$(-\mu - h)(-\omega - \mu - h) \left(\beta\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) - \mu - \mu' - \gamma - \delta - h \right) (-\mu - \kappa - h) = 0,$$

sehingga diperoleh nilai eigen sebagai berikut:

$$\begin{aligned} h_1 &= -\mu, \\ h_2 &= -(\omega + \mu), \\ h_3 &= -(\mu + \kappa) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
 h_4 &= \left(\frac{\beta\lambda}{\mu} - (\mu + \mu' + \gamma + \delta) \right) \\
 &= \frac{\mu(\mu + \mu' + \gamma + \delta)\mathfrak{R}_0}{\mu} - (\mu + \mu' + \gamma + \delta) \\
 &= (\mu + \mu' + \gamma + \delta)\mathfrak{R}_0 - (\mu + \mu' + \gamma + \delta) \\
 &= (\mu + \mu' + \gamma + \delta)(\mathfrak{R}_0 - 1).
 \end{aligned}$$

Nilai h_4 adalah negatif karena diketahui $\mathfrak{R}_0 < 1$. Berdasarkan hal tersebut, terbukti E_0 stabil asimtotik lokal untuk semua nilai parameter positif yang diberikan.

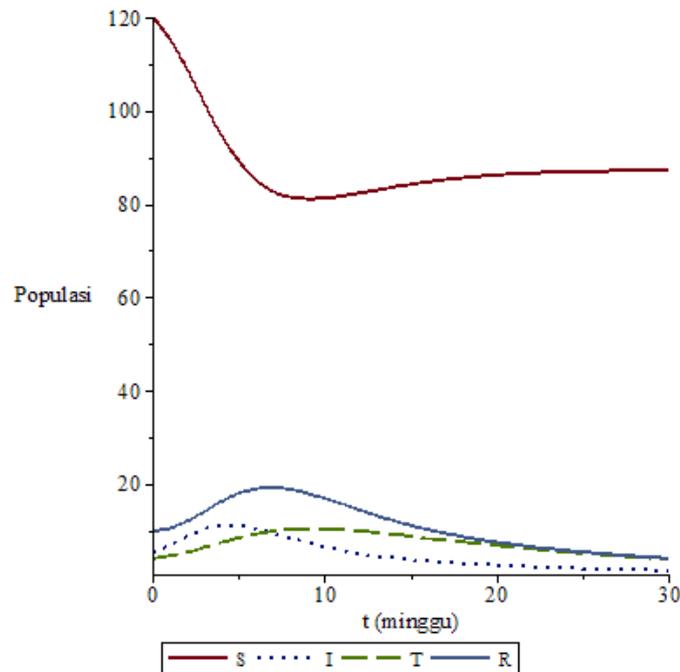
3.6. Simulasi Numerik

Parangkat *Maple* digunakan untuk menyelesaikan Sistem (1) secara numerik dengan nilai-nilai parameter sebagai berikut:

Tabel 3 . Nilai parameter pada model SITRS

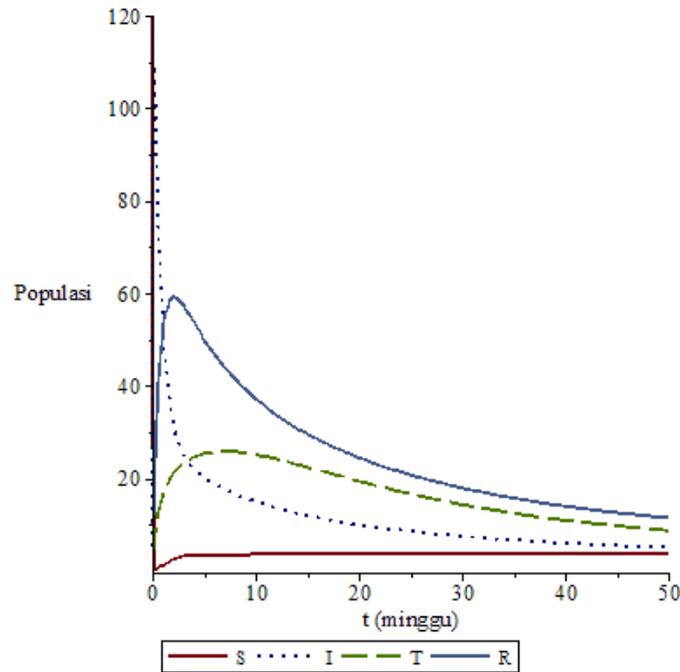
| Parameter | Nilai | Sumber |
|-----------|-------|-------------|
| λ | 0.9 | Diasumsikan |
| β | 0.012 | [6] |
| μ | 0.012 | [7] |
| μ' | 0.2 | [7] |
| δ | 0.178 | [6] |
| γ | 0.712 | [6] |
| κ | 0.11 | [7] |
| ω | 0.4 | Diasumsikan |

Selanjutnya nilai awal yang digunakan adalah $S(0) = 120, I(0) = 5, T(0) = 4, R(0) = 10$ [7]. Berdasarkan nilai parameter dan nilai awal tersebut, diperoleh grafik solusi sebagai berikut



Gambar 2. Solusi Sistem (1) saat $\mathfrak{R}_0 < 1$

Berdasarkan Gambar 2, diperoleh nilai $\mathcal{R}_0 = 0.8166969147$, terlihat bahwa solusi Sistem (1) menuju titik ekulibrium $E_0 = (75, 0, 0, 0)$. Selanjutnya populasi kelas I menuju 0 sesaat setelah $t = 25$. Artinya pada saat $\mathcal{R}_0 < 1$, semakin lama wabah diare akan menghilang dari populasi. Akan tetapi jika nilai $\beta = 0.3$ [7] diperoleh gambar sebagai berikut



Gambar 3. Solusi Sistem (1) saat $\mathcal{R}_0 > 1$

Berdasarkan Gambar 3, diperoleh nilai $\mathcal{R}_0 = 20.41742287$ dan solusi Sistem (1) mendekati $E_1 = (S_1, I_1, T_1, R_1) = (3, 6; 3, 3; 4, 8; 7, 1)$. Artinya pada saat $\mathcal{R}_0 > 1$, individu yang terserang penyakit diare masih tetap ada dalam populasi.

4. SIMPULAN

Model matematika tentang penyebaran penyakit diare di Sistem (1) dibahas dalam penelitian ini. Teori kestabilan nilai eigen digunakan dalam menganalisis kestabilan lokal di sekitar titik ekulibrium bebas penyakit diare. Penelitian ini menemukan bahwa titik ekulibrium bebas penyakit stabil asimtotik lokal jika dipenuhi $\mathcal{R}_0 < 1$. Selanjutnya melalui simulasi numerik, dibandingkan solusi Sistem (1) saat $\mathcal{R}_0 < 1$ dan $\mathcal{R}_0 > 1$. Hasil menunjukkan bahwa ketika $\mathcal{R}_0 < 1$, solusi Sistem (1) menuju titik ekulibrium bebas penyakit, yang mengindikasikan bahwa diare dalam populasi akan hilang pada suatu saat jika persyaratan terpenuhi untuk tingkat kontak antara individu rentan dengan individu terinfeksi diare dan tingkat kelahiran yang lebih rendah dari jumlah tingkat kematian dan tingkat kesembuhan diare dengan dan tanpa pengobatan. Namun, jika sebaliknya, wabah diare akan tetap ada dalam populasi.

REFERENSI

- [1] E. Bonyah, G. Twagirumukiza, and P. P. Gambah, "Mathematical analysis of diarrhea model with saturated incidence rate," *Open J. Math. Sci.*, vol. 3(2019), no. 1, pp. 29–39, 2019, doi: 10.30538/oms2019.0046.
- [2] H. Auld, D. MacIver, and J. Klaassen, "Heavy rainfall and waterborne disease outbreaks: The Walkerton

- example," *J. Toxicol. Environ. Heal. - Part A*, vol. 67, no. 20–22, pp. 1879–1887, 2004, doi: 10.1080/15287390490493475.
- [3] B. M. Gatto, L. Mari, and A. Rinaldo, "Leading Eigenvalues and the Spread of Cholera," vol. 46, no. 7, pp. 7–8, 2013.
- [4] A. K. Githeko, S. W. Lindsay, U. E. Confalonieri, and J. A. Patz, "Climate change and vector-borne diseases: A regional analysis," *Bull. World Health Organ.*, vol. 78, no. 9, pp. 1136–1147, 2000.
- [5] J. Ardkaew and P. Tongkumchum, "Statistical modelling of childhood diarrhea in northeastern Thailand," *Southeast Asian J. Trop. Med. Public Health*, vol. 40, no. 4, pp. 807–815, 2009.
- [6] V. Astuti, Y. Yulida, and T. Thresye, "Model Matematika Penyebaran Penyakit Deare Dengan Adanya Treatment," *Epsil. J. Mat. Murni Dan Terap.*, vol. 15, no. 1, p. 46, 2021, doi: 10.20527/epsilon.v15i1.3152.
- [7] S. O. Adewale, I. A. Olopade, S. O. Ajao, and G. A. Adeniran, "MATHEMATICAL ANALYSIS OF DIARRHEA IN THE PRESENCE OF VACCINE," vol. 6, no. 12, pp. 396–404, 2015.
- [8] A. L. Olutimo *et al.*, "Mathematical Modeling of Diarrhea with Vaccination and Treatment Factors To cite this version : HAL Id : hal-04552022 Mathematical Modeling of Diarrhea with Vaccination and Treatment Factors," 2024, doi: 10.9734/JAMCS/2024/v39i51891.
- [9] E. I. Akinola, B. E. Awoyemi, I. A. Olopade, O. D. Falowo, and T. O. Akinwumi, "Mathematical Analysis of a Diarrhoea Model in the Presence of Vaccination and Treatment Waves with Sensitivity Analysis," *J. Appl. Sci. Environ. Manag.*, vol. 25, no. 7, pp. 1107–1114, 2021, doi: 10.4314/jasem.v25i7.2.