VOLUME 3, No 2, December 2024
e-ISSN: 2987-206X
https://ejournal.unib.ac.id/diophantine/

Hubungan antara Matriks Sirkuit dan Matriks Insidensi dari Suatu Graf

Maria Vianney Any Herawati
Mathematics Department, Sanata Dharma University, Yogyakarta

* Corresponding Author: any@usd.ac.id

Article Information

Article History:
Submitted: 10 14 2024
Accepted: 12 15 2024
Published: 12 31 2024

Key Words:
Graf
Matriks Sirkuit
Matriks Insidensi

DOI:
https://10.33369/diophantine.v3i2.3747

Abstract

Meskipun penyajian graf dengan gambar yang terdiri dari titik dan busur memberikan cara yang sangat jelas secara visual, akan tetapi ada represantasi lain yang lebih baik untuk pemrosesan graf secara komputer yaitu menggunakan matriks. Selain memudahkan dalam manipulasi aljabar, aljabar matriks dapat dengan mudah diterapkan untuk mempelajari sifat-sifat struktural graf dari sudut pandang aljabar. di antaranya dalam aplikasi teori graf untuk analisis jaringan listrik dan riset operasi. Ada macam-macam representasi matriks dari suatu graf yaitu matriks adjasensi, matriks insidence, matriks sirkuit,, matriks cut-set, dan matriks path. Tulisan ini akan membahas tentang sifat-sifat matriks sirkuit, matriks insidensi dan sifat yang menghubungkan antara matriks sirkuit dan matriks insidensi graf.

1. PENDAHULUAN

Matriks insidensi dari suatu graf merupakan representasi matematik yang menghubungkan titik-titik dan busur-busur dari graf tersebut, sedangkan matriks sirkuit menghubungkan titik-titik dan sirkuit-sirkuit dalam graf tersebut. Dalam matriks insidensi, setiap baris berpadanan dengan titik sedangkan setiap kolom berpadanan dengan busur. Entri matriks tersebut 1 bila titik yang berpadanan dengan baris tersebut insiden dengan busur yang berpadanan dengan kolom tersebut, dan 0 bila tidak. Matriks insidensi menjadi alat untuk menganalisis dan menyelesaikan permasalahan terkait graf dalam berbagai bidang, baik matematika, teknik, dan komputer. Dalam matriks sirkuit, setiap baris berpadanan dengan titik dan setiap kolom berpadanan dengan sirkuit dalam graf tersebut. Entri matriks tersebut 1 bila titik yang berpadanan dengan baris tersebut berada dalam sirkuit yang berpadanan dengan kolom tersebut, dan 0 bila tidak. Matriks sirkuit dipakai dalam optimisasi arus lalu lintas, jaringan komunikasi dan desain rangkaian elektronik. Adapun graf yang dibahas di sini adalah graf tak berarah yang tidak mengandung loop. Tulisan ini akan membahas tentang matriks insidensi dan matriks sirkuit beserta sifat-sifatnya.

Terminologi

Berikut ini adalah terminologi-terminologi dasar dalam teori graf yang diambil dari [1] :
Graf $G = (V, E)$ terdiri dari himpunan obyek $V = \{v_1, v_2, \dots\}$ yang disebut titik, dan himpunan $E = \{e_1, e_2, \dots\}$, yang elemennya disebut busur, sedemikian hingga setiap busur e_k dinyatakan dengan pasangan terurut titik-titik $\{v_i, v_j\}$ dan titik v_i, v_j disebut titik ujung dari e_k. Busur yang mempunyai titik ujung sama, yaitu busur $\{v_i, v_j\}$ disebut loop. Sejumlah busur bisa mempunyai titik-titik ujung sama, busur-busur seperti itu dikatakan paralel. Graf biasa digambarkan dengan diagram yang mana titik dari graf tersebut digambar sebagai titik dan setiap busur dengan ruas garis yang menghubungkan titik-titik ujungnya. Bila titik v_i adalah ujung dari busur e_j, v_i dan e_j dikatakan saling insiden. Banyaknya busur yang insiden dengan titik v_i disebut derajat dari v_i, dinotasikan dengan $d(v_i)$. Setiap loop menyumbang dua ke derajat dari titik ujungnya. Titik dengan derajat nol disebut titik terisolasi. Dua graf G dan G' dikatakan isomorfik bila ada korespondensi satu-satu antara simpul-simpulnya dan antara busur-busurnya sedemikian hingga hubungan incidencinya dipertahankan. Walk adalah barisan selang seling titik dan busur, yang dimulai dan berakhir

dengan titik, sedemikian hingga setiap busur insiden dengan titik-titik yang muncul sebelum dan sesudah busur tersebut. Dalam suatu walk boleh ada pengulangan titik, tetapi tidak boleh ada pengulangan busur. Titik-titik awal dan akhir dari suatu walk disebut titik terminal. Walk yang dimulai dan berakhir di titik yang sama disebut walk tertutup. Walk yang tidak tertutup disebut walk terbuka. Walk terbuka yang tidak memuat pengulangan titik disebut path. Dalam walk dimungkinkan ada loop, sedangkan dalam path tidak. Walk tertutup tanpa pengulangan titik (kecuali titik awal dan akhir) disebut sirkuit. Suatu graf dikatakan terhubung bila untuk setiap pasang simpul dalam graf tersebut ada path. Suatu graf g disebut subgraf dari graf G bila semua simpul dan semua busur dari g ada di $G,$ dan setiap busur dari g memiliki simpul-simpul ujung yang sama di g dan di G. Graf yang tidak terhubung terdiri dari dua atau lebih subgraph yang terhubung secara maksimal. Masing-masing subgraf yang terhubung secara maksimal tersebut disebut komponen. Bila G adalah graf dengan n simpul, e busur dan k komponen, maka rank dan nullitas dari G didefinisikan dengan: rank $r = n - k$ dan nullitas $\mu = e - n - k$.

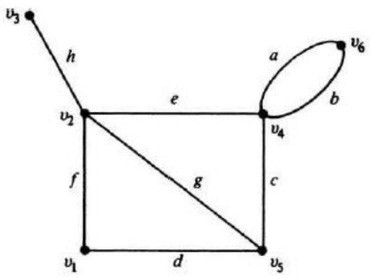
Matriks Insidensi

Misal G adalah graf dengan n simpul, e busur, dan tanpa loop. Didefinisikan matriks $= \left[a_{ij}\right]_{n\times e}$, dengan n baris yang berpadanan dengan n simpul tersebut dan e kolom yang berpadanan dengan e busur tersebut, sebagai berikut :

$a_{ij} = 1$, bila busur ke-j insiden dengan titik ke-i yaitu v_i, dan $a_{ij} = 0$ bila tidak.

Matriks tersebut disebut matriks insidensi simpul-busur, atau matriks insidensi. Matriks insidensi A dari graf G dinotasikan dengan $A(G)$.

Contoh 1 :



$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}$$

Gambar 1. Graf dan matriks insidensinya.

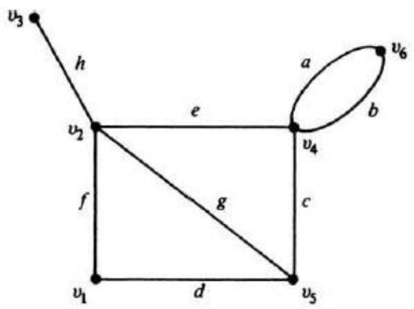
Matriks Sirkuit

Misal banyaknya sirkuit yang berbeda dalam suatu graf G adalah q dan banyaknya busur dalam G adalah e. Maka matriks sirkuit $B = \left[b_{ij}\right]_{q\times e}$ dari G didefinisikan dengan

$b_{ij} = 1$ bila sirkuit ke-i memuat busur ke-j dan $b_{ij} = 0$ bila tidak.

Matriks sirkuit dari graf G dinotasikan dengan $B(G)$.

Contoh 2 :



Gambar 2. Graf dengan 4 sirkuit $\{a, b\}$, $\{c, e, g\}, \{d, f, g\}$, $\{c, d, f, e\}$.

Matriks sirkuit dari graf di atas yaitu:

$$\mathbf{B}(G) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Matriks insidensi memiliki beberapa sifat yang cukup jelas yaitu sebagai berikut :

- Elemen matriks insidensi hanya 0 dan 1.
- Karena setiap busur insiden dengan tepat dua simpul, maka setiap kolom dari A mempunyai tepat dua 1.
- Banyaknya 1 dalam setiap baris sama dengan derajat dari simpul yang berpadanan dengan baris tersebut.
- Baris yang terdiri dari 0 semua menyatakan titik terisolasi.
- Busur-busur yang paralel dalam suatu graf menghasilkan kolom-kolom yang sama dalam matriks insidensinya.
- Bila graf G tidak terhubung dan terdiri dari dua komponen g_1 dan g_2 maka matriks insidensi $A(G)$dapat ditulis dam bentuk diagonal-blok
$$A(G) = \begin{bmatrix} A(g_1) & 0 \\ 0 & A(g_2) \end{bmatrix}$$
dengan $A(g_1)$ dan $A(g_2)$ adalah matriks insidensi dari komponen g_1 dan g_2.
- Dua graf G_1 dan G_2 isomorfik bila dan hanya bila matriks insidensi dari G_1 dan G_2 berbeda hanya dalam hal permutasi baris-baris atau kolom-kolomnya.

Begitu pula dengan matriks sirkuit memiliki beberapa sifat yang cukup jelas sebagai berikut :

- Kolom yang semua elemennya nol berpadanan dengan busur yang tidak masuk dalam sirkuit manapun.
- Setiap baris dari $B(G)$ adalah vektor sirkuit.
- Matriks sirkuit dari graf G dimungkinkan untuk G memuat loop dan baris yang berpadanan dengan loop tersebut akan memuat elemen tunggal 1.
- Banyaknya 1 dalam suatu baris sama dengan banyaknya busur dalam sirkuit yang berpadanan dengan baris tersebut.
- Bila graf G tidak terhubung dan terdiri dari dua komponen g_1 dan g_2, maka matriks sirkuit $B(G)$ dapat ditulis dam bentuk diagonal-blok
$$B(G) = \begin{bmatrix} B(g_1) & 0 \\ 0 & B(g_2) \end{bmatrix}$$
di mana $B(g_1)$ dan $B(g_2)$ adalah matriks sirkuit dari komponen g_1 dan g_2.

Teorema 1. [1] *Misal B dan A berturut-turut adalah matriks sirkuit dan matriks insidensi (dari graf tanpa loop) yang kolom-kolomnya disusun menggunakan pengurutan busur yang sama. Maka setiap baris dari B ortogonal dengan setiap baris dari A, yaitu*

$$A.B^T = B.A^T = 0(mod\ 2) \qquad (1)$$

dengan superscript T menyatakan transpose matriks.

Proof. Perhatikan titik v dan sirkuit S dalam graf G. Ada 2 kasus yaitu v di S atau tidak. Bila v tidak di S berarti tidak ada busur dalam sirkuit S yang insiden dengan v. Bila v tidak di S, maka banyaknya busur dalam sirkuit S yang insiden dengan v tepat dua. Selanjutnya perhatikan baris ke-i dari A dan kolom ke-j dari B. Karena busur-busurnya disusun dalam urutan yang sama, maka elemen tak nol dalam posisi yang berpadanan muncul hanya bila busur tersebut insiden dengan titik ke-i dan juga dalam sirkuit ke-j. Bila titik ke-i tidak berada di sirkuit ke-j maka tidak ada entri tak nol tersebut, dan hasil kali titik dari kedua baris tersebut adalah nol. Bila titik ke-i berada di sirkuit ke-j, berarti ada tepat dua 1 dalam jumlah dari perkalian entri-entrinya. Karena 1+1 = 0(mod 2) maka hasil kali titik dari dua baris sebarang (satu dari A yang lain dari B) adalah nol. ■

3. SIMPULAN

Bila B dan A berturut-turut adalah matriks sirkuit dan matriks insidensi (dari graf tanpa loop) yang kolom-kolomnya disusun menggunakan pengurutan busur yang sama, maka setiap baris dari B ortogonal dengan setiap baris dari A.

REFERENSI

[1] N. Deo , Graph theory with applications to engineering & computer science, Universitet Central Florida , 2016.
[2] J.A.Bondy and U.S.R.Murty, Graph Theory With Applications, Fifth Printing, Elsevier Science Publishing, Co., Inc., USA, 1982.
[3] Graph Matrices, http://compalg.inf.elte.hu/~tony/Oktatas/TDK/FINAL/Chap%2010.PDF (acess on July 22, 2024).
[4] L.R.Foulds, Graph Theory Applications, Springer-Verlag New York, Inc., 1992.
[5] Matrix Representation of Graphs, https://www.icet.ac.in/Uploads/Downloads/3_MOD5.pdf (acess on July 22, 2024).
[6] H.Leka and F.Kabashi, Incidence Matrix and Some of Its Applications in Graph Theory, University for Business and Technnology , Kosovo, 2021.
[7] Md.A.Islam, S.Kar, and O.Faruk, Matrix Representations of Graph Theory with Different Operations, Article in IOSR Journal of Mathematics, DOI: 10.9790/5728-1801010827, 2022.
[8] M.W.Fasfous, A Study of Graph Theory With Matrix Representation, Hebron, 2017.
[9] Incidence Structures and Incidence Matrices, https://faculty.etsu.edu/gardnerr/Design-Theory/notes-Design-Theory-grad-BJL/Design-Theory-grad-BJL-1-1.pdf (acess on May 28,2024).
[10] K.Ruohonen, Graph Theory, https://cse.iitkgp.ac.in/~bivasm/cnt_notes/Basic-graph-theory-2.pdf (acess on July 20,2024).