ISSN 0216-2393

Jurnal Gradien Vol.2 No.1 Januari 2006 : 139-143

Bentuk Umum Perluasan Teorema Pythagoras

Mulia Astuti, Buyung Keraman, Ulfasari Rafflesia

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Bengkulu, Indonesia

Diterima 1 September 2005; disetujui 20 Desember 2005

Abstrak - Penelitian ini membahas perluasan teorema Pythagoras melalui pendekatan hubungan kesetaraan pada luas daerah. Secara matematis luas daerah diukur berdasarkan variabel-variabel yang terkait dan kesetaraan pada luas daerah dikembalikan pada kesetaraan fungsi-fungsi yang mengacu pada variabel tersebut. Perluasan teorema Pythagoras di $\mathbf{R}^2$ dengan pendekatan hubungan kesetaraan pada luas daerah dapat menjelaskan hubungan luas daerah yang berkaitan dengan panjang sisi-sisi segitiga siku-siku. Fokus dari penelitian ini adalah membahas perluasan teorema Pythagoras di $\mathbf{R}^n$.

Kata Kunci : **Hubungan Kesetaraan; Teorema Pythagoras**.

1. Pendahuluan

Ausri [3] telah menyelidiki perluasan teorema Pythagoras di $\mathbf{R}^2$ dengan menggunakan hubungan kesetaraan pada luas daerah yang berkaitan dengan sisi segitiga siku-siku. Hasil yang diperoleh adalah penjumlahan luas daerah yang berkaitan dengan sisi siku-siku sama dengan luas daerah yang berkaitan dengan sisi miringnya.

Makalah ini akan membahas bentuk umum perluasan teorema Pythagoras yaitu di $\mathbf{R}^n$, dengan menggunakan hubungan kesetaraan pada luas daerah, pada persamaan dengan bentuk umum :

$$x_1{}^2 = x_2{}^2 + x_3{}^2 + \ldots + x_n{}^2 + g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (1)$$

atau pada persamaan dengan bentuk umum

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots + x_n{}^2 \quad (2)$$

Dalam hal ini $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $a_i > 0$, $1 \le i \le n$ merupakan solusi persamaan (1) atau persamaan (2).

2. Hubungan Kesetaraan [4]

Dalam mendefinisikan hubungan kesetaraan, diperlukan notasi-notasi berikut:

1. Notasi $f_a(x), g_a(x), F_a(x), G_a(x), \varphi_a(x), \gamma_a(x)$ menyatakan fungsi kontinu untuk suatu konstanta $a > 0, a \in \mathbf{R}$ dan $x \in [0, a]$
2. Notasi $f_{-a}(x), g_{-a}(x), F_{-a}(x), G_{-a}(x), \varphi_{-a}(x), \gamma_{-a}(x)$ menyatakan fungsi kontinu untuk suatu konstanta $a > 0, a \in \mathbf{R}$ dan $x \in [-a, 0]$
3. Notasi $R(f_a(x), g_a(x))$ menyatakan daerah di bidang kartesian yang dibatasi oleh:
   (i) Fungsi $f_a(x)$ dan fungsi $g_a(x)$ dengan $g_a(x) \le f_a(x) \ \forall\, x \in [0, a]$
   (ii) Garis vertikal $x = 0$ dan $x = a$.
4. Notasi $A(f_a(x), g_a(x))$ menyatakan luas daerah $R(f_a(x), g_a(x))$.

Definisi 2.1 (Hubungan kesetaraan pada selang) [**3**]

Dua selang dikatakan setara jika kedua selang tersebut mempunyai panjang yang sama. Misalnya :

1. Selang $0 \le t \le x_1$ setara dengan selang $0 \le \dfrac{x_2}{x_1} t \le x_2$, untuk $x_1 \ne 0$
2. Selang $0 \le t \le 4$ setara dengan selang $6 \le t \le 10$.

Definisi 2.2 (Hubungan kesetaraan pada fungsi) [3]

(i) Fungsi $f_a(x)$ dikatakan setara dengan $F_b(x)$, ditulis $f_a(x)\ \pi\, F_b(x)$, jika:

$$F_b(x) = \frac{b}{a} f_a\left(\frac{a}{b} x\right) \ \ \forall x \in [0, b]$$

(ii) Fungsi $f_{-a}(x)$ dikatakan setara dengan $F_{-b}(x)$ ditulis $f_{-a}(x)\ \pi\ F_{-b}(x)$, jika:

$$F_{-b}(x)=\frac{b}{a}f_{-a}\left(\frac{a}{b}x\right)\ \ \forall x\in[-b,0].$$

Misalnya :

Fungsi $f_a(x)=\sqrt{a^2-x^2}\ \ 0\le x\le a$ setara dengan fungsi $F_b(x)=\sqrt{b^2-x^2}\ \ 0\le x\le b$.

Definisi 2.3 (Hubungan kesetaraan pada luas daerah) [**3**]

(i) Daerah $R(f_a(x),g_a(x))$ setara dengan daerah $R(F_b(x),G_b(x))$, ditulis $R(f_a(x),g_a(x))\ \pi\ R(F_b(x),G_b(x))$ jika $f_a(x)\ \pi\ F_b(x)$ dan $g_a(x)\ \pi\ G_b(x)$

(ii) Luas daerah $R(f_a(x),g_a(x))$ namakan $A(f_a(x),g_a(x))$ dihitung dengan:

$$A(f_a(x),g_a(x))=\int_0^a (f_a(x)-g_a(x))\,dx.$$

Definisi 2.4 [**2**]

Misalkan n adalah bilangan bulat positif, n-tupel terurut didefinisikan sebagai urutan n bilangan riil $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$. Himpunan semua n-tupel terurut dinamakan Ruang-n Euclidis dan dinotasikan dengan $\mathbf{R}^n$

3. Contoh Perluasan Teorema Pythagoras di $\mathbf{R}^2$

Perluasan teorema Pythagoras di $\mathbf{R}^2$ menggunakan hubungan kesetaraan pada luas daerah yang berkaitan dengan sisi-sisi segitiga siku-siku. Berikut contoh perluasan teorema Pythagoras di $\mathbf{R}^2$.

1. Pada masing-masing sisi segitiga siku-siku terdapat daerah beraturan yang berbentuk bujur sangkar. Hubungan luas bujur sangkar tersebut adalah $a^2 + b^2 = c^2$.
2. Pada masing-masing sisi segitiga siku-siku terdapat daerah yang beraturan berbentuk setengah lingkaran dengan diameter sama dengan sisi segitiga siku-siku. Hubungan antara luas setengah lingkaran tersebut adalah: $\frac{\pi}{8}a^2+\frac{\pi}{8}b^2=\frac{\pi}{8}c^2$
3. Pada masing-masing sisi segitiga siku-siku terdapat daerah yang beraturan berbentuk segitiga yang setara.

Misalkan segitiga itu membentuk sudut-sudut α,β dan θ. Hubungan luas ketiga segitiga setara di atas adalah:

$$\frac{a^2\sin\theta\theta\sin\beta\beta}{2\sin\alpha\alpha}+\frac{b^2\sin\theta\theta\sin\beta\beta}{2\sin\alpha\alpha}=$$

$$\frac{c^2\sin\theta\theta\sin\beta\beta}{2\sin\alpha\alpha}$$

Jika pada masing-masing sisi segitiga siku-siku terdapat daerah yang tidak beraturan, maka teorema 3.1 memperlihatkan hubungan antara luas daerah yang terdapat pada masing-masing sisi segitiga siku-siku.

Teorema 3.1 [**4**]

Misalkan a dan b adalah panjang sisi siku-siku dan c adalah sisi miring segitiga siku-siku. Misalkan daerah $R(f_a(x),g_a(x))$, $R(F_b(x),G_b(x))$ dan $R(\varphi_c(x),\gamma_c(x))$ setara maka:

$$A(f_a(x),g_a(x))+A(F_b(x),G_b(x))=A(\varphi_c(x),\gamma_c(x))$$

Akibat 3.2 [**4**]

Misalkan a ,b dan c masing-masing adalah panjang sisi segitiga sebarang, dengan sisi c berlawanan dengan sudut θ. Misalkan daerah $R(f_a(x),g_a(x))$, $R(F_b(x),G_b(x))$ dan $R(\varphi_c(x),\ \gamma_c(x))$ setara. Maka:

$$A(\varphi_c(x),\gamma_c(x))=A(f_a(x),g_a(x))+$$
$$A(F_b(x),G_b(x))-\frac{2ab\cos\theta}{c^2}A(\varphi_c(x),\gamma_c(x))$$

4. Bentuk Umum Perluasan Teorema Pythagoras

Bentuk umum perluasan teorema Pythagoras, yaitu di ruang-n Euclidis, dilakukan dengan memperluas pasangan terurut $(a,b)\ a>0,b>0$ di $\mathbf{R}^2$ yang merupakan solusi persamaan lingkaran $f(x,y)=x^2+y^2=c^2$, menjadi n-tupel terurut $(a_1,a_2,...,a_n)$, $a_i>0, 1\le i\le n$ di $\mathbf{R}^n$ yang merupakan solusi persamaan (1) atau merupakan solusi persamaan (2).

Sehingga bentuk umum perluasan teorema Pythagoras ini, diperoleh dengan memperluas Teorema 3.1 menjadi teorema 4.2 dan Akibat 3.2 menjadi teorema 4.1 yaitu sebagai berikut :

Teorema 4.1

Misalkan $(a_1, a_2, ..., a_n)$, $a_i > 0, 1 \le i \le n$ adalah solusi Persamaan (1). Misalkan daerah $R(f_{a_1}, g_{a_1}), R(f_{a_2}, g_{a_2}), ..., R(f_{a_n}, g_{a_n})$ setara, maka berlaku:

$$A(f_{a_1}, g_{a_1}) = A(f_{a_2}, g_{a_2}) + ... + A(f_{a_n}, g_{a_n}) + \frac{g(a_1, a_2, ..., a_n)}{a_1^2} A(f_{a_1}, g_{a_1})$$

Bukti:

Berdasarkan Definisi 2.3 (ii) diperoleh:

$$A(f_{a_2}, g_{a_2}) + ... + A(f_{a_n}, g_{a_n}) =$$

$$\int_0^{a_2} (f_{a_2}(x) - g_{a_2}(x))dx + ... + \qquad (3)$$

$$\int_0^{a_n} (f_{a_n}(x) - g_{a_n}(x))dx ....$$

karena daerah $R(f_{a_1}, g_{a_1}), R(f_{a_2}, g_{a_2}), ..., R(f_{a_n}, g_{a_n})$ setara, berdasarkan Definisi 2.2 dan Definisi 2.3 (i), maka Persamaan (3) ditulis sebagai:

$$A(f_{a_2}, g_{a_2}) + ... + A(f_{a_n}, g_{a_n}) =$$

$$\int_0^{a_2} \frac{a_2}{a_1}\left(f_{a_1}(\frac{a_1}{a_2}x) - g_{a_1}(\frac{a_1}{a_2}x)\right) dx + ... + \qquad (4)$$

$$\int_0^{a_n} \frac{a_n}{a_1}\left(f_{a_1}(\frac{a_1}{a_n}x) - g_{a_1}(\frac{a_1}{a_n}x)\right) dx ......$$

Dengan melakukan perubahan variabel yaitu: $u_i = \frac{a_1}{a_{i+1}} x, i = 1, ..., n-1$ maka Persamaan (4) dapat pula ditulis sebagai:

$$A(f_{a_2}, g_{a_2}) + ... + A(f_{a_n}, g_{a_n}) =$$

$$\int_0^{a_1} \frac{a_2}{a_1}\left(f_{a_1}(u_1) - g_{a_1}(u_1)\right) \frac{a_2}{a_1} du_1 + ... +$$

$$\int_0^{a_1} \frac{a_n}{a_1}\left(f_{a_1}(u_{n-1}) - g_{a_1}(u_{n-1})\right) \frac{a_n}{a_1} du_{n-1} ....$$

$$= \int_0^{a_1} \frac{a_2^2}{a_1^2}\left(f_{a_1}(x) - g_{a_1}(x)\right) dx + ... +$$

$$\int_0^{a_1} \frac{a_n^2}{a_1^2}\left(f_{a_1}(x) - g_{a_1}(x)\right) dx ....$$

$$= \frac{a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2}{a_1^2} \int_0^{a_1} \left(f_{a_1}(x) - g_{a_1}(x)\right) dx \qquad (5)$$

Karena $(a_1, a_2, ..., a_n)$ adalah solusi Persamaan (1), maka diperoleh:

$$a_1^2 = a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2 + g(a_1, a_2, ..., a_n)$$

$$a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2 = a_1^2 - g(a_1, a_2, ..., a_n).$$

Sehingga Persamaan (5) dapat dituliskan sebagai:

$$A(f_{a_2}, g_{a_2}) + ... + A(f_{a_n}, g_{a_n}) =$$

$$\frac{a_1^2 - g(a_1, a_2, ..., a_n)}{a_1^2} \int_0^{a_1} (f_{a_1}(x) - g_{a_1}(x))dx$$

$$= \frac{a_1^2 - g(a_1, a_2, ..., a_n)}{a_1^2} A(f_{a_1}, g_{a_1})$$

$$= A(f_{a_1}, g_{a_1}) - \frac{g(a_1, a_2, ..., a_n)}{a_1^2} A(f_{a_1}, g_{a_1})$$

Dengan demikian diperoleh persamaan:

$$A(f_{a_1}, g_{a_1}) = A(f_{a_2}, g_{a_2}) + ... + A(f_{a_n}, g_{a_n}) + \frac{g(a_1, a_2, ..., a_n)}{a_1^2} A(f_{a_1}, g_{a_1})$$

Teorema 4.2

Misalkan $(a_1, a_2, ..., a_n)$, $a_i > 0, 1 \le i \le n$ adalah solusi Persamaan (2). Misalkan daerah $R(f_{a_1}, g_{a_1}), R(f_{a_2}, g_{a_2}), ..., R(f_{a_n}, g_{a_n})$ setara, maka :

$$\sum_{j=1}^{n} A(f_{a_j}, g_{a_j}) = \left(\frac{f(a_1, a_2, ..., a_n)}{a_i^2} \right) A(f_{a_i}, g_{a_i}).$$

Jika $A(f_{a_i}, g_{a_i}) \ne 0$ maka

$$f(a_1, a_2, ..., a_n) = \frac{a_i^2}{A(f_{a_i}, g_{a_i})} \sum_{j=1}^{n} A(f_{a_j}, g_{a_j}).$$

Bukti:

Berdasarkan Definisi 2.3 (ii) diperoleh:

$$\sum_{j=1}^{n} A(f_{a_j}, g_{a_j}) = A(f_{a_1}, g_{a_1}) + \ldots +$$

$$A(f_{a_n}, g_{a_n}) = \int_0^{a_1} (f_{a_1}(x) - g_{a_1}(x))dx + \ldots + \quad (6)$$

$$\int_0^{a_n} (f_{a_n}(x) - g_{a_n}(x))dx.......$$

karena daerah $R(f_{a_1}, g_{a_1}), R(f_{a_2}, g_{a_2}), \ldots, R(f_{a_n}, g_{a_n})$ setara, berdasarkan Definisi 2.2 dan Definisi 2.3 (i), maka Persamaan (4.6) ditulis sebagai:

$$\sum_{j=1}^{n} A(f_{a_j}, g_{a_j}) = \int_0^{a_1} \frac{a_1}{a_i}\left(f_{a_i}(\frac{a_i}{a_1}x) - g_{a_i}(\frac{a_i}{a_1}x)\right)dx + \ldots + \int_0^{a_n} \frac{a_n}{a_i}\left(f_{a_i}(\frac{a_i}{a_n}x) - g_{a_i}(\frac{a_i}{a_n}x)\right)dx \quad (7)$$

Dengan melakukan perubahan variabel yaitu: $u_j = \frac{a_i}{a_j}x,\ j = 1,\ldots,n-1$ maka Persamaan (7) dapat pula ditulis sebagai:

$$\sum_{j=1}^{n} A(f_{a_j}, g_{a_j}) = \int_0^{a_i} \frac{a_1}{a_i}\left(f_{a_i}(u_1) - g_{a_i}(u_1)\right)\frac{a_1}{a_i}du_1 + \ldots + \int_0^{a_i} \frac{a_n}{a_i}\left(f_{a_i}(u_n) - g_{a_i}(u_n)\right)\frac{a_n}{a_i}du_n$$

$$= \int_0^{a_i} \frac{a_1^2}{a_i^2}\left(f_{a_i}(x) - g_{a_i}(x)\right)dx + \ldots + \int_0^{a_i} \frac{a_n^2}{a_i^2}\left(f_{a_i}(x) - g_{a_i}(x)\right)dx$$

$$= \frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{a_i^2} \int_0^{a_i} \left(f_{a_i}(x) - g_{a_i}(x)\right)dx \quad (8)$$

Karena $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ adalah solusi Persamaan (2), maka:

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2.$$

Dengan demikian Persamaan (4.8) dapat dituliskan sebagai:

$$\sum_{j=1}^{n} A(f_{a_j}, g_{a_j}) = \left(\frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{a_i^2}\right) A(f_{a_i}, g_{a_i}).$$

Jelas bahwa, bila $A(f_{a_i}, g_{a_i}) \neq 0$ maka:

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{a_i^2}{A(f_{a_i}, g_{a_i})} \sum_{j=1}^{n} A(f_{a_j}, g_{a_j}).$$

Akibat 4.3

Misalkan $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $a_i > 0, 1 \le i \le n$ adalah solusi Persamaan (4.2). Misalkan daerah $R(f_{a_k}, g_{a_k}) 1 \le k \le n$ semuanya setara. Luas daerah $R(f_{a_k}, g_{a_k})$ yaitu $A(f_{a_k}, g_{a_k}) = 0$ jika dan hanya jika $\sum_{j=1}^{n} A(f_{a_j}, g_{a_j}) = 0$.

Bukti:

$(\Rightarrow)$ Misalkan $A(f_{a_k}, g_{a_k}) = 0$. Maka menurut Teorema 4.2, $\sum_{j=1}^{n} A(f_{a_j}, g_{a_j}) = 0$.

$(\Leftarrow)$ Misalkan $\sum_{j=1}^{n} A(f_{a_j}, g_{a_j}) = 0$ dan andaikan $A(f_{a_k}, g_{a_k}) \neq 0$ untuk suatu k dengan $1 \le k \le n$. Maka menurut Teorema 4.2 haruslah $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$ hal ini bertentangan dengan Persamaan (2). Oleh karena itu haruslah $A(f_{a_k}, g_{a_k}) = 0$.

Akibat 4.4

Misalkan $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $a_i > 0, 1 \le i \le n$ adalah solusi Persamaan (2). Misalkan daerah $R(f_{a_j}, g_{a_j}) 1 \le j \le n$ semuanya setara. Jika $A(f_{a_k}, g_{a_k}) \neq 0$ dan $A(f_{a_i}, g_{a_i}) \neq 0$ untuk sebarang i,k dengan $(1 \le i \le n, 1 \le k \le n$ maka $\frac{a_i^2}{A(f_{a_i}, g_{a_i})} = \frac{a_k^2}{A(f_{a_k}, g_{a_k})}$

Bukti:

Misalkan $A(f_{a_k}, g_{a_k}) \neq 0$ untuk $1 \le k \le n$ dan daerah $R(f_{a_j}, g_{a_j})$ semuanya setara untuk $1 \le j \le n$ maka menurut Teorema 4.2 berlaku:

$$f(a_1, a_2, ..., a_n) = \frac{a_k^2}{A(f_{a_k}, g_{a_k})} \sum_{j=1}^{n} A(f_{a_j}, g_{a_j}). \quad (9)$$

dengan cara yang sama berlaku pula:

$$f(a_1, a_2, ..., a_n) = \frac{a_i^2}{A(f_{a_i}, g_{a_i})} \sum_{j=1}^{n} A(f_{a_j}, g_{a_j}). \quad (10)$$

Dari Persamaan (9) dan (10) diperoleh:

$$\frac{a_i^2}{A(f_{a_i}, g_{a_i})} \sum_{j=1}^{n} A(f_{a_j}, g_{a_j}) = \frac{a_k^2}{A(f_{a_k}, g_{a_k})} \sum_{j=1}^{n} A(f_{a_j}, g_{a_j})$$

Dengan demikian diperoleh:

$$\frac{a_i^2}{A(f_{a_i}, g_{a_i})} = \frac{a_k^2}{A(f_{a_k}, g_{a_k})}$$

Akibat 4.5

Misalkan $(a_1, a_2, ..., a_n), a_i > 0, 1 \le i \le n$ adalah solusi Persamaan (4.2). Misalkan daerah $R(f_{a_j}, g_{a_j})$ dan daerah $R(F_{a_j}, G_{a_j})$ setara untuk $1 \le j \le n$. Jika $A(f_{a_k}, g_{a_k}) \ne 0$ dan $A(F_{a_k}, G_{a_k}) \ne 0$ maka $\frac{A(f_{a_i}, g_{a_i})}{A(F_{a_i}, G_{a_i})} = \frac{A(f_{a_k}, g_{a_k})}{A(F_{a_k}, G_{a_k})}$ untuk sebarang i,k dengan $(1 \le i \le n, 1 \le k \le n$.

Bukti:

Misalkan $A(f_{a_k}, g_{a_k}) \ne 0$ untuk $1 \le k \le n$ dan daerah $R(f_{a_j}, g_{a_j})$ setara untuk $1 \le j \le n$ maka menurut Akibat 4.4 diperoleh:

$$\frac{a_i^2}{A(f_{a_i}, g_{a_i})} = \frac{a_k^2}{A(f_{a_k}, g_{a_k})} \quad (11)$$

Misalkan $A(F_{a_k}, G_{a_k}) \ne 0$ untuk $1 \le k \le n$ dan daerah $R(F_{a_j}, G_{a_j})$ setara untuk $1 \le j \le n$ maka menurut Akibat 4.4 diperoleh:

$$\frac{a_i^2}{A(F_{a_i}, G_{a_i})} = \frac{a_k^2}{A(F_{a_k}, G_{a_k})} \quad (12)$$

Dari Persamaan (11) dan Persamaan (12) diperoleh:

$$a_i^2 = \frac{a_k^2}{A(f_{a_k}, g_{a_k})} A(f_{a_i}, g_{a_i}) = \frac{a_k^2}{A(F_{a_k}, G_{a_k})} A(F_{a_i}, G_{a_i})$$

Dengan demikian diperoleh:

$$\frac{A(f_{a_i}, g_{a_i})}{A(F_{a_i}, G_{a_i})} = \frac{A(f_{a_k}, g_{a_k})}{A(F_{a_k}, G_{a_k})}.$$

5. Kesimpulan

1. Telah diperoleh hasil perluasan teorema Pythagoras di $\mathbf{R}^2$ dengan menggunakan hubungan kesetaraan pada luas daerah. Hasil yang diperoleh dari penggunaan hubungan kesetaraan tersebut adalah : Jika pada setiap sisi segitiga siku-siku terdapat daerah yang beraturan maupun yang tidak beraturan dan setara, maka terdapat hubungan diantara luas daerah tersebut dengan persamaan teorema pythagoras, yaitu:luas daerah yang terkait dengan sisi miring segitiga siku-siku, namakan sisi c merupakan penjumlahan dari luas daerah yang terkait dengan panjang sisi siku-siku, namakan sisi a dan sisi b.
2. Dari hasil perluasan teorema Pythagoras di $\mathbf{R}^2$ diperoleh bentuk perumusan umum perluasan teorema Pythagoras, yaitu di $\mathbf{R}^n$ seperti dijelaskan dalam teorema 4.1 dan teorema 4.2.

Daftar pustaka

[1] Anton, H., *Calculus with Analytic Geometry*, **1988**, John Wiley. New York

[2] Anton, H., *Aljabar Linier Elementer*, Edisi kelima, **1994**, Erlangga, Jakarta

[3] Ausri, A., *Pengembangan Sifat Pythagoras dengan Menggunakan Hubungan Kesetaraan*, **1997**, Jumpa 6 : 83-90

[4] Clay, James R and Yuen Fong, *Generalization of Pythagorean Theorem*, **1995**, Sea Bull. Math. 19:19-26

[5] Herstein, I.N., 1975. *Topics In Algebra*. 2th ed. **1975**, John Wiley. New York