ISSN 0216-2393

Jurnal Gradien Vol. 2 No. 2 Juli 2006 : 192-195

Linierisasi Matriks Polynomial

Zulfia Memi Mayasari

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Bengkulu, Indonesia

Diterima 20 Juni 2006; disetujui 1 Juli 2006

Abstrak - Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji linierisasi matriks polynomial monik Linerisasi matriks polynomial monik $L(\lambda)$ adalah mencari matriks polynomial linier yang ekuivalen dengan suatu matriks polynomial. Dalam menganalisis masalah linerisasi matriks polynomial monik yaitu dengan cara mengubah $L(\lambda) = I\lambda^{\ell} + \sum_{j=0}^{\ell-1} A_j \lambda^{j}$ dimana A_0, A_1,…,A_j adalah matriks-matriks berukuran n x n menjadi bentuk linier $L(\lambda) = I\lambda - A$ sehingga $I\lambda - A$ ekuivalen dengan $\begin{bmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$.

Kata kunci : **linierisasi; polynomial monik**.

1. Pendahuluan

Teori matriks merupakan bagian penting dalam aljabar linier. Banyak sekali penerapan-penerapan dari teori matriks, khususnya matriks polynomial yang dapat dipakai dalam pemecahan masalah-masalah matematika. Misalnya nilai awal, teori sistem, analisa getaran, teori jaringan, analisa numerik dan persamaan differensial [**1**]. Matriks polynomial juga dikenal sebagai λ-matriks. Matriks polynomial diartikan sebagai polynomial dari variabel-variabel kompleks dengan koefisien matriks. Jika A_0 , A_1, . . . , A_ℓ adalah matriks berukuran n x n dengan entri-entrinya bilangan kompleks dan jika $A_\ell \neq 0$, maka fungsi bernilai matriks yang didefenisikan sebagai $L(\lambda) = \sum_{i=0}^{\ell} A_i \lambda^i$ dinamakan matriks polynomial berderajat ℓ. Jika A_ℓ pada matriks polynomial diatas merupakan matriks identitas, maka matriks polynomial ini dikatakan monik. Jadi matriks polynomial monik dapat ditulis sebagai: $L(\lambda) = I\lambda^{\ell} + \sum_{j=0}^{\ell-1} A_j \lambda^{j}$, dimana A_0 , A_1, . . . , A_j adalah matriks berukuran n x n yang entri-entrinya adalah bilangan kompleks. Linerisasi matriks polynomial monik $L(\lambda)$ adalah mencari matriks polynomial linier yang ekuivalen dengan suatu matriks polynomial. Permasalahan yang akan dijawab dalam kasus ini adalah bagaimana menganalisis linerisasi matriks polynomial monik $L(\lambda)$,

2. Matriks Polynomial dan Linierisasi

Definisi 1 [**1**]
Jika A_0, A_1,…,A_ℓ matriks-matriks berukuran n x n dan entri-entrinya adalah bilangan kompleks dan $A_\ell \neq 0$, maka fungsi bernilai matriks yang didefinisikan sebagai $L(\lambda) = \sum_{i=0}^{\ell} A_i \lambda^{i}$ disebut matriks polynomial berderajat ℓ. Jika $A_\ell = I$, dimana I merupakan matriks identitas, maka matriks polynomial tersebut dikatakan monik, dan ditulis sebagai $L(\lambda) = I\lambda^{\ell} + \sum_{j=0}^{\ell-1} A_j \lambda^{j}$.

Definisi 2 [**2**]
Matriks polynomial $M_1(\lambda)$ dan $M_2(\lambda)$ dikatakan ekuivalen jika $M_1(\lambda) = E(\lambda) M_2(\lambda) F_2(\lambda)$ untuk suatu matriks polynomial $E(\lambda)$ dan $F(\lambda)$ yang berukuran sama dengan $M_1(\lambda)$ dan $M_2(\lambda)$ serta det $(E(\lambda))$ ($E_1(\lambda)$), dan det $(F(\lambda)) \neq 0$ dan ditulis $M_1(\lambda) \sim M_2(\lambda)$.

Definisi

Jika $L(\lambda) = I\lambda^{\ell} + \sum_{j=0}^{\ell-1} A_j \lambda^j$ adalah matriks polynomial monik berukuran n x n , maka matriks

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -A_0 & -A_1 & -A_2 & \cdots & -A_{\ell-1} \end{bmatrix}$$

dimana C_1 berukuran $n\ell$ x $n\ell$ disebut matriks Companion pertama dari $L(\lambda)$, dan matriks

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & -A_0 \\ I & 0 & \cdots & -A_1 \\ 0 & I & \cdots & -A_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -A_{\ell-1} \end{bmatrix} = C_1^T$$

disebut matriks Companion kedua dari $L(\lambda)$

Definisi 4

Suatu matriks polynomial $I\lambda - A$ yang berukuran $n\ell$ x $n\ell$ disebut linerisasi matriks polynomial monik $L(\lambda)$ berukuran n x n , jika: $I\lambda - A \sim \begin{bmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$

Definisi 5

Diberikan matriks A dalam $C[\lambda]^{nxn}$. A disebut unimodular jika mempunyai A^{-1} yang merupakan matriks dalam $C[\lambda]^{nxn}$.

Pada matriks polynomial didefinisikan tiga jenis operasi baris elementer yaitu:

Definisi 6

Jenis 1 : Menukar dua baris yang berlainan.

Jenis 2 : Mengalikan suatu baris dengan suatu konstanta tak nol.

Jenis 3 : Menambahkan pada suatu baris dengan hasil kali baris lain dengan suatu polynomial dalam $C[\lambda]$.

Definisi diatas menunjukkan bahwa operasi kebalikan dari setiap operasi elementer merupakan operasi elementer dari jenis yang sama dan juga hasil operasi elementer pada suatu matriks unimodular juga matriks unimodular.

Diberikan matriks polynomial monik berderajat ℓ, $L(\lambda) = I\lambda^{\ell} + \sum_{j=0}^{\ell-1} A_j \lambda^j$. Dalam menganalisis masalah linerisasi matriks polynomial monik tersebut, yaitu bagaimana mengubah $L(\lambda) = I\lambda^{\ell} + \sum_{j=0}^{\ell-1} A_j \lambda^j$ dimana $A_0, A_1, \ldots, A_j$ adalah matriks-matriks berukuran n x n menjadi bentuk linier $L(\lambda) = I\lambda - A$ sehingga $I\lambda - A$ ekuivalen dengan $\begin{bmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$.

Pernyataan ini dapat dilihat dengan mengambil contoh sebagai berikut: Diberikan matriks polynomial monik $L(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + I\lambda^3$ [3]. Dari matriks polynomial tersebut dapat dibentuk matriks

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 + \lambda \end{bmatrix}.$$

Dengan operasi baris elementer pada $\lambda I - A$ diperoleh matriks

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \lambda^3 & a_1 + a_2\lambda + \lambda^2 & a_2 + \lambda \end{bmatrix}$$

yang ekuivalen dengan $\lambda I - A$. Hal ini berarti $L(\lambda)$ yang semula berderajat tiga dan dengan melakukan proses diatas diperoleh polynomial $\lambda I - A$ yang linier.

Teorema 7

Diberikan suatu matriks polynomial monik berderajat ℓ dan berukuran n x n , $L(\lambda) = I\lambda^{\ell} + \sum_{j=0}^{\ell-1} A_j \lambda^j$ dan didefinisikan:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -A_0 & -A_1 & -A_2 & \cdots & -A_{\ell-1} \end{bmatrix}$$

maka $I\lambda - C_1 \begin{bmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$

Bukti:

Menurut definisi 2 maka dapat dibentuk matriks polynomial $E(\lambda)$ dan $F(\lambda)$ yang berukuran $n\ell$ x $n\ell$ sebagai berikut:

$$F(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -A_0 & -A_1 & -A_2 & \cdots & -A_{\ell-1} \end{bmatrix}$$

dan

$$E(\lambda) = \begin{bmatrix} B_{\ell-1}(\lambda) & B_{\ell-2}(\lambda) & \cdots & B_0(\lambda) \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

dengan $B_{\ell-1}(\lambda) = I$ dan $B_{r+1}(\lambda) = \lambda B_r(\lambda) + A_{\ell-r-1}$ untuk r = 0, 1, …., ℓ-1. Maka det $F(\lambda)$ = 1 dan det $E(\lambda)$ = ± 1, yaitu:

- jika n genap maka det $(E(\lambda))$ = $(-1)^{\ell+1}$
- jika n ganjil maka det $(E(\lambda))$ = 1.

Akibatnya $E(\lambda)$, $F(\lambda)$ unimodular dan

$$\lambda I - C_1 = (E(\lambda))^{-1} \begin{bmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \pm (\lambda)$$

berarti $\lambda I - C_1 \sim \begin{bmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$.

Teorema 7 menyatakan bahwa C_1 merupakan linerisasi matriks polynomial monik $L(\lambda) = I\lambda^{\ell} + \sum_{j=0}^{\ell-1} A_j \lambda^j$ dan matriks C_1 diatas disebut matriks companion pertama dari $L(\lambda)$.

Linerisasi suatu matriks polynomial monik $L(\lambda)$ tidak tunggal. Misalkan ambil $C_2 = C_1^T$ yaitu C_2 adalah transpose matriks C_1. Jika diambil semua transpose pada teorema 7 maka C_2 juga merupakan linerisasi dari polynomial monik $L(\lambda)$. Hal ini didasarkan pada teorema berikut. Sebelumnya akan diberikan beberapa konsep yang mendukung teorema dan pembuktian teorema tersebut.

Sifat 8

Dua linierisasi dari matriks polynomial $L(\lambda)$ adalah similar.

Bukti:

Misalkan C_1 dan C_2 adalah linierisasi dari $L(\lambda)$ maka: $\lambda I - C_1 \sim \begin{bmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ dan $\lambda I - C_2 \sim \begin{bmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ akibatnya $\lambda I - C_1 \sim \lambda I - C_2$. Maka terdapat $P(\lambda)$ dan $Q(\lambda)$ yang unimodular sehingga

$$\lambda I - C_1 = P(\lambda)(\lambda I - C_2)Q(\lambda) =$$
$$P(\lambda)\ \lambda\ Q(\lambda) - P(\lambda)\ C_2\ Q(\lambda)$$

maka $I = P(\lambda)Q(\lambda)$ sehingga $Q(\lambda) = (P(\lambda))^{-1}$ dan

$$C_2 = P(\lambda)C_2Q(\lambda)$$
$$C_2 = P(\lambda)C_2(P(\lambda))^{-1}$$

sehingga diperoleh $C_1 \approx C_2$

Sifat 9

Jika T linierisasi matriks polynomial monik $L(\lambda)$ dan S similar dengan T, maka S juga linierisasi matriks polynomial monik $L(\lambda)$.

Bukti:

Karena T linierisasi matriks polynomial monik $L(\lambda)$ maka

$$\lambda I - T \sim \begin{bmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (1)$$

karena S similar dengan T maka menurut sifat 8 diperoleh

$$\lambda I - T \sim \lambda I - S \quad (2)$$

dari (1) dan (2) diperoleh $\lambda I - S \sim \begin{bmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ yaitu S juga merupakan linierisasi dari $L(\lambda)$

Teorema 10

Matriks $C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & -A_0 \\ I & 0 & \cdots & -A_1 \\ 0 & I & \cdots & -A_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -A_{\ell-1} \end{bmatrix}$ Adalah linierisasi matriks polynomial monik $L(\lambda) = I\lambda^{\ell} + \sum_{j=0}^{\ell-1} A_j \lambda^j$

Bukti:

Berdasarkan teorema 7, $\lambda I - C_1 \sim \begin{bmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ dengan C_1 merupakan matriks companion pertama. Karena itu terdapat *P*(λ) dan *Q*(λ) yang merupakan matriks unimodular sehingga

$$\lambda I - C_1 = P(\lambda) \begin{bmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Q(\lambda) .$$

Akibatnya

$$[\lambda I - C_1]^T = \left[P(\lambda) \begin{bmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Q(\lambda) \right]^T =$$

$$[Q(\lambda)]^T \begin{bmatrix} L^T(\lambda) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [P(\lambda)]^T$$

Jadi $\lambda I - C_1^{\ T} \sim \begin{bmatrix} L^T(\lambda) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ berarti

$$\lambda I - C_2 \sim \begin{bmatrix} L^T(\lambda) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

yaitu C_2 merupakan linierisasi matriks polynomial monik $L(\lambda)$.

3. Kesimpulan

Untuk setiap matriks polynomial monik $L(\lambda)$, dapat ditentukan matriks *A* sebagai linierisasinya. Linierisasi matriks polynomial monik $L(\lambda)$ tidak tunggal

Jika A_1 dan A_2 masing-masing merupakan linierisasi matriks polynomial monik $L(\lambda)$, maka A_1 ekuivalen A_2. Jika A_1 ekuivalen A_2 dan A_1 merupakan linierisasi matriks polynomial monik $L(\lambda)$, maka A_2 juga merupakan linierisasi matriks polynomial monik $L(\lambda)$.

Daftar Pustaka

[1] Cullen. G. C., *Matrices And Linear Transformations*, **1996**, Addison-Wesley Publishing Company.

[2] Gohberg. I. , Lancester. P, and Rodman. L, M., *Matrix Polynomial*, **1982**, Academic Press.

[3] Mayasari, Z.M., *Analisis Linierisasi Matriks Polynomial Monik Dan Aplikasinya Pada Persamaan Differensia,*. **2005**, Laporan Penelitian PPD Heds. Jakarta