ISSN 0216-2393

Jurnal Gradien Vol.3 No.2 Juli 2007 : 277-281

Uji Median Pengaruh Utama dan Interaksi dalam Percobaan Berfaktor

Sigit Nugroho

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Bengkulu, Indonesia

Diterima 1 Juni 2007; Disetujui 26 Juli 2007

Abstract - Factorial experiments with fixed effects in randomized complete block design can be modeled as $Y_{ijk} = \mu + \beta_i + \tau_j + \varphi_k + (\tau\varphi)_{jk} + \varepsilon_{ijk}$ $i = 1, 2, ..., b$ $j = 1, 2, ..., t$ $k = 1, 2, ..., m$. To test main effects and its interaction when basic assumptions are met is using the F test (ANOVA). Nonparametric alternative testing for main effects median and interaction median is discussed in this paper.

Keywords : *factorial, nonparametric, median, main effects and interaction.*

Pendahuluan

Dalam tulisan ini model yang digunakan adalah $Y_{ijk} = \mu + \beta_i + \tau_j + \varphi_k + (\tau\varphi)_{jk} + \varepsilon_{ijk}$ dengan $i = 1, 2, ..., b$ $j = 1, 2, ..., t$ $k = 1, 2, ..., m$. Bila asumsi dasar model ini dipenuhi, maka prosedur statistika parametrik digunakan untuk menguji pengaruh-pengaruh utama τ_j dan φ_k, serta interaksi $(\tau\varphi)_{jk}$. Analisis keragaman merupakan prosedur yang tepat untuk itu.

Untuk menguji $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = ... = \tau_t$ lawan $H_1 : \tau_i \neq \tau_j$ $i \neq j$ digunakan statistik uji $KT(\tau)/KT(\varepsilon)$. Tolak hipotesis nol apabila $KT(\tau)/KT(\varepsilon) > F_{t-1;(b-1)(tm-1)}$. Untuk menguji $H_0 : \varphi_1 = \varphi_2 = ... = \varphi_m$ lawan $H_1 : \varphi_i \neq \varphi_j$ $i \neq j$ digunakan statistik uji $KT(\varphi)/KT(\varepsilon)$. Tolak hipotesis nol apabila $KT(\varphi)/KT(\varepsilon) > F_{m-1;(b-1)(tm-1)}$. Sedangkan untuk menguji $H_0 : (\tau\varphi)_{11} = (\tau\varphi)_{12} = ... = (\tau\varphi)_{tm}$ lawan $H_1 : (\tau\varphi)_{ij} \neq (\tau\varphi)_{kl}$ $ij \neq kl$ digunakan statistik uji $KT(\tau\varphi)/KT(\varepsilon)$. Tolak hipotesis nol apabila $KT(\tau\varphi)/KT(\varepsilon) > F_{(t-1)(m-1);(b-1)(tm-1)}$.

a. Alternatif Pengujian

Tidak terpenuhinya asumsi dasar rancangan percobaan, seperti normalitas dan kehomogenan ragam ataupun karena skala pengukuran, mengakibatkan perlu dipertanyakannya validitas analisis jika prosedur diatas (prosedur parametrik) tetap digunakan. Oleh karena itu, sebagai alternatif pengujian dapat digunakan prosedur statistika nonparametrik.

Median merupakan salah satu ukuran pemusatan data, disamping *mean* atau rata-rata. Untuk data yang tidak simetris, median lebih baik untuk mendiskripsikan ukuran pemusatan data daripada *mean*. Oleh karenanya, sebagai alternatif digunakan uji median untuk melihat pengaruh-pengaruh utama perlakuan maupun interaksinya.

b. Pengujian Median Pengaruh Utama τ_j

Dalam setiap blok, banyaknya pengamatan yang digunakan untuk menghitung pengaruh utama τ_j ada sebanyak *m*. Sedangkan untuk setiap kombinasi blok β_i dan perlakuan φ_k ada sebanyat *t* pengaruh utama *τ*. Dengan demikian, untuk pengujian median pengaruh utama τ_j perlu dilakukan melalui tahapan-tahapan seperti berikut:

1. Hipotesis nol : median pengaruh utama τ_j sama pada tiap kombinasi blok β_i dan perlakuan φ_k dan hipotesis tandingannya secara umum menyatakan bahwa hipotesis nol tidak benar.
2. Kelompokkan data untuk melihat pengaruh antar perlakuan pada tiap kombinasi blok β_i dan perlakuan φ_k . Artinya untuk tiap *i = 1,2,...,b* dan *k =1,2,...,m* data yang dikelompokkan tersebut adalah $Y_{i1k}, Y_{i2k}, ..., Y_{itk}$.
3. Hitung nilai median data $Y_{i1k}, Y_{i2k}, ..., Y_{itk}$ untuk tiap *i = 1,2,...,b* dan *k =1,2,...,m*. Sebut saja nilainya dengan $m_\tau^{(ik)}$.
4. Untuk setiap nilai *j = 1,2,..., t*, hitung $O_j^{(1)} = \sum_{i=1}^{b}\sum_{k=1}^{m}\Psi(Y_{ijk} > m_\tau^{(ik)})$ yaitu banyaknya pengamatan akibat perlakuan τ_j pada setiap kombinasi blok β_i dan perlakuan φ_k yang lebih besar dari nilai mediannya, $m_\tau^{(ik)}$. Dengan cara yang sama juga dihitung besarnya $O_j^{(0)} = \sum_{i=1}^{b}\sum_{k=1}^{m}\Psi(Y_{ijk} \le m_\tau^{(ik)})$. Sebagai tambahan, $O_j^{(1)} + O_j^{(0)} = bm$.
5. Hitung statistik $$T_\tau = \frac{bmt^2}{\left(\sum_{j=1}^{t}O_j^{(1)}\right)\left(\sum_{j=1}^{t}O_j^{(0)}\right)}\sum_{j=1}^{t}\left(O_j^{(1)} - \bar{O}_j^{(1)}\right)^2$$ dimana $\bar{O}_j^{(1)} = \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t}O_j^{(1)}$.
6. Tolak hipotesis nol jika $T_\tau > \chi^2_{t-1,\alpha}$

c. Pengujian Median Pengaruh Utama φ_k

Dalam setiap blok, banyaknya pengamatan yang digunakan untuk menghitung pengaruh utama φ_k ada sebanyak *t*. Sedangkan untuk setiap kombinasi blok β_i dan perlakuan τ_j ada sebanyat *m* pengaruh utama φ . Dengan demikian, untuk pengujian median pengaruh utama φ_k perlu dilakukan melalui tahapan-tahapan seperti berikut:

1. Hipotesis nol : median pengaruh utama φ_k sama pada tiap kombinasi blok β_i dan perlakuan τ_j dan hipotesis tandingannya secara umum menyatakan bahwa hipotesis nol tidak benar.
2. Kelompokkan data untuk melihat pengaruh antar perlakuan pada tiap kombinasi blok β_i dan perlakuan τ_j . Artinya untuk tiap *i = 1,2,...,b* dan *j =1,2,...,t* data yang dikelompokkan tersebut adalah $Y_{ij1}, Y_{ij2}, ..., Y_{ijm}$.
3. Hitung nilai median data $Y_{ij1}, Y_{ij2}, ..., Y_{ijm}$ untuk tiap *i = 1,2,...,b* dan *j =1,2,...,t*. Sebut saja nilainya dengan $m_\varphi^{(ij)}$.
4. Hitung $O_k^{(1)} = \sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{t}\Psi(Y_{ijk} > m_\varphi^{(ij)})$ yaitu banyaknya pengamatan akibat perlakuan φ_k pada setiap kombinasi blok β_i dan perlakuan τ_j yang lebih besar dari nilai mediannya, $m_\varphi^{(ij)}$. Dengan cara yang sama juga dihitung besarnya $O_k^{(0)} = \sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{t}\Psi(Y_{ijk} \le m_\varphi^{(ij)})$. Sebagai tambahan, $O_k^{(1)} + O_k^{(0)} = bt$.
5. Hitung statistik $$T_\vartheta = \frac{btm^2}{\left(\sum_{k=1}^{m}O_k^{(1)}\right)\left(\sum_{k=1}^{m}O_k^{(0)}\right)}\sum_{k=1}^{m}\left(O_k^{(1)} - \bar{O}_k^{(1)}\right)^2$$ dimana $\bar{O}_k^{(1)} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}O_k^{(1)}$.
6. Tolak hipotesis nol jika $T_\varphi > \chi^2_{m-1,\alpha}$

d. Pengujian Median Pengaruh Interaksi $(\tau\varphi)_{jk}$

Untuk pengujian median pengaruh interaksi $(\tau\varphi)_{jk}$ perlu dilakukan melalui tahapan-tahapan seperti berikut:

1. Hipotesis nol : median pengaruh interaksi $(\tau\varphi)_{jk}$ sama pada tiap blok β_i dan hipotesis tandingannya secara umum menyatakan bahwa hipotesis nol tidak benar.

2. Kelompokkan data untuk melihat pengaruh kombinasi perlakuan pada tiap blok β_i. Artinya untuk tiap $i = 1,2,...,b$ data yang dikelompokkan tersebut adalah Y_{i11}, Y_{i12}, ..., Y_{i1m}, Y_{i21}, Y_{i22},... Y_{i2m},..., Y_{it1},..., Y_{itm}.
3. Hitung nilai median data Y_{i11}, Y_{i12}, ..., Y_{i1m}, Y_{i21}, Y_{i22},... Y_{i2m},..., Y_{it1},..., Y_{itm} untuk tiap $i = 1,2,...,b$. Sebut saja nilainya dengan $m_{\tau\varphi}^{(i)}$.
4. Hitung $O_{jk}^{(1)} = \sum_{i=1}^{b} \Psi(Y_{ijk} > m_{\tau\varphi}^{(i)})$ yaitu banyaknya pengamatan akibat perlakuan $(\tau\varphi)_{jk}$ pada setiap kombinasi blok β_i yang lebih besar dari nilai mediannya, $m_{\tau\varphi}^{(i)}$. Dengan cara yang sama juga dihitung besarnya $O_{jk}^{(0)} = \sum_{i=1}^{b} \Psi(Y_{ijk} \le m_{\tau\varphi}^{(i)})$. Sebagai tambahan, $O_{jk}^{(1)} + O_{jk}^{(0)} = b$.
5. Hitung statistik
$$T_{\tau\vartheta} = \frac{bt^2m^2}{\left(\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{m} O_{jk}^{(1)}\right)\left(\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{m} O_{jk}^{(0)}\right)} \sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{m}\left(O_{jk}^{(1)} - \bar{O}_{jk}^{(1)}\right)^2$$
dimana $\bar{O}_{jk}^{(1)} = \frac{1}{tm}\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{m} O_{jk}^{(1)}$.
6. Tolak hipotesis nol jika $T_{\tau\varphi} > \chi^2_{(t-1)(m-1),\alpha}$

e. Sebaran Eksak Statistik Uji

Secara umum bentuk data frekuensi pengamatan yang lebih besar dan tidak lebih besar dari median untuk pengujian median ini dapat disajikan seperti berikut. Sebaran pasti statistik T merupakan sebaran bersyarat yang tergantung pada total baris dan total kolom.

Peluang untuk memperoleh komposisi data seperti tabel

$O_1^{(1)}$	$O_2^{(1)}$	...	$O_c^{(1)}$	$a = \sum_{j=1}^{c} O_j^{(1)}$
$O_1^{(0)}$	$O_2^{(0)}$	...	$O_c^{(0)}$	$b = \sum_{j=1}^{c} O_j^{(0)}$
n_1	n_2		n_c	N

dengan total kolom yang tetap adalah

$$\prod_{j=1}^{c} \binom{n_j}{O_j^{(1)}} p^{O_j^{(1)}} (1-p)^{O_j^{(0)}}$$

dimana p adalah peluang sebuah pengamatan bernilai lebih dari nilai mediannya.

Apabila total baris diketahui atau ditetapkan nilainya, maka sebaran pasti T memiliki fungsi kepekatan peluang

$$\frac{\binom{n_1}{O_1^{(1)}}\binom{n_2}{O_2^{(1)}}\cdots\binom{n_c}{O_c^{(1)}}}{\binom{N}{a}}$$

Namun dalam prakteknya, sebaran kai-kuadrat dengan derajat bebas $c-1$ digunakan.

f. Teladan

Dalam percobaan berfaktor 4x3 dalam rancangan acak kelompok lengkap diperoleh data seperti berikut :

		Faktor φ											
Faktor τ		1				2				3			
		1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Blok	1	85,34	96,07	87,16	94,35	81,65	92,97	90,53	90,81	89,37	100,50	92,65	94,87
	2	89,40	89,07	98,45	93,78	85,64	89,86	85,30	89,67	97,77	95,61	93,86	101,36
	3	88,22	92,13	93,42	93,30	86,25	82,57	97,85	82,87	94,81	91,56	87,76	92,79
	4	82,49	91,04	87,87	86,72	87,28	85,03	95,33	90,43	85,40	88,18	101,39	91,72
	5	84,21	91,68	93,92	92,89	83,42	95,45	93,22	89,47	87,95	90,09	89,04	99,40
	6	89,60	94,28	85,38	90,03	81,45	86,63	93,90	86,84	85,34	99,61	103,20	90,26

Untuk melakukan pengujian median pengaruh utama perlakuan pertama (dinotasikan dengan Faktor τ) dapat dipermudah dengan membuat tabel di bawah ini, yang merupakan transformasi tiap nilai diatas menjadi 1 atau 0. Penentuan nilai 1 atau 0 ini dengan menggunakan kriteria $\Psi(Y_{ijk} > m_{\tau}^{(ik)})$, dimana Ψ merupakan fungsi indikator.

Hasil dari transformasi diatas adalah

		Faktor φ											
Faktor τ		1				2				3			
		1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Blok	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
	2	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1
	3	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1
	4	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
	5	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1
	6	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0

Selanjutnya dihitung untuk tiap taraf perlakuan τ, banyaknya pengamatan yang lebih besar (dan juga yang lebih kecil atau sama dengan) mediannya:

Faktor τ	1	2	3	4	
>med	3	9	10	14	36
<=med	15	9	8	4	36
	18	18	18	18	72

Dengan demikian,

$$T_{\tau} = \frac{bmt^2}{\left(\sum_{j=1}^{t} O_j^{(1)}\right)\left(\sum_{j=1}^{t} O_j^{(0)}\right)} \sum_{j=1}^{t}\left(O_j^{(1)} - \bar{O}_j^{(1)}\right)^2 = 13,8 \; .$$

Nilai peluangnya dapat dihitung dengan fungsi pada Microsoft Excel misalnya, chidist(13,8;3) = 0,003. Dengan demikian median pengaruh utama τ berbeda secara signifikan pada taraf 1%, karena nilai-p atau nilai signifikansi pengujian ini (0,003) lebih kecil dari taraf pengujiannya (0,010).

Selanjutnya, untuk melakukan pengujian median pengaruh utama perlakuan kedua (dinotasikan dengan Faktor φ) dapat dipermudah dengan membuat tabel di bawah ini, dengan cara yang sama seperti diatas, yang merupakan transformasi tiap nilai diatas menjadi 1 atau 0. Penentuan nilai 1 atau 0 ini dengan menggunakan kriteria $\Psi(Y_{ijk} > m_{\varphi}^{(ij)})$

Hasil dari transformasi diatas adalah

Faktor τ		Faktor φ 1				2				3			
		1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Blok	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
	2	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1
	3	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0
	4	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
	5	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
	6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1

Selanjutnya dihitung untuk tiap taraf perlakuan φ, banyaknya pengamatan yang lebih besar (dan juga yang lebih kecil atau sama dengan) mediannya:

Faktor φ	1	2	3		
>med	6	3	15		24
<=med	18	21	9		48
	24	24	24		72

Dengan demikian,

$$T_{\vartheta} = \frac{btm^2}{\left(\sum_{k=1}^{m} O_k^{(1)}\right)\left(\sum_{k=1}^{m} O_k^{(0)}\right)} \sum_{k=1}^{m}\left(O_k^{(1)} - \bar{O}_k^{(1)}\right)^2 = 14,63 \; .$$

Nilai peluangnya dapat dihitung dengan fungsi pada Microsoft Excel misalnya, chidist(14,63;2) = 0,001. Dengan demikian median pengaruh utama φ berbeda secara signifikan pada taraf 1%.

Akhirnya, untuk pengujian pengaruh interaksi diperoleh tabel transformasinya seperti berikut

Faktor τ		Faktor φ 1				2				3			
		1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Blok	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1
	2	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
	3	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0
	4	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0
	5	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
	6	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0

Dengan cara yang sama seperti prosedur perhitungan pengaruh utama τ dan φ diperoleh

			Faktor φ 1	2	3	Sub total
> med	Faktor τ	1	3	3	3	36
		2	3	3	3	
		3	3	3	3	
		4	3	3	3	
≤ med		1	3	3	3	36
		2	3	3	3	
		3	3	3	3	
		4	3	3	3	
Sub total		1	6	6	6	72
		2	6	6	6	
		3	6	6	6	
		4	6	6	6	

Dengan menggunakan statistik uji

$$T_{\tau\vartheta} = \frac{bt^2m^2}{\left(\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{m} O_{jk}^{(1)}\right)\left(\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{m} O_{jk}^{(0)}\right)} \sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{m}\left(O_{jk}^{(1)} - \bar{O}_{jk}^{(1)}\right)^2$$

Nilai dari statistik ini adalah 0, dengan demikian chidist(0;6) = 1,000. Ini berarti bahwa tidak terdapat interaksi antara pengaruh utama τ dan θ terhadap median.

Daftar Pustaka

[1] Conover, W.J., **1971**, *Practical Nonparametric Statistics*. Wiley International Edition, John Wiley & Sons. New York. NY.

[2] Gibbons, J.D., **1985**, *Nonparametric Statistical Inference.* 2nd ed. Revised and Extended. Marcel Dekker, Inc. New York. NY.

[3] Randles R.H., and D.A. Wolfe, **1979,** *Introduction to the Theory of Nonparametric Statistics*, John Wiley & Sons. New York.