ISSN 0216-2393
Jurnal Gradien Vol 8 No 1 Januari 2012:775-779

Penerapan Aljabar Max-Plus Pada Sistem Produksi Meubel Rotan

Ulfasari Rafflesia

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Bengkulu, Indonesia

Diterima 15 November 2011; Disetujui 12 Desember 2011

Abstrak - Tulisan ini membahas suatu pemakaian dari Aljabar Max-Plus dalam memodelkan proses produksi meubel Sri Rotan dan melihat perilaku dinamik sistem melalui suatu simulasi yang berkaitan dengan keadaan sistem menggunakan software open source scilab 5.1.1 dan *Max-Plus Algebra Toolbox*, ver. 1.01. Hasil pengolahan dengan menggunakan aljabar max-plus, memberikan suatu jadwal yang periodik pada setiap tahap pengerjaan sehingga tidak menghabiskan banyak waktu dalam proses pembuatan satu set meubel sri rotan

Kata kunci : **Aljabar max-plus, perilaku dinamik, keadaan sistem**

1. Pendahuluan

Propinsi Bengkulu merupakan salah satu daerah yang sedang melakukan pembangunan secara menyeluruh di segala bidang, salah satunya pembangunan di bidang industri yang lebih diarahkan untuk meningkatkan industri kecil dan kerajinan rakyat melalui penyempurnaan, pengembangan usaha, peningkatan produktivitas, perbaikan mutu produk, dan peningkatan kemampuan untuk memasarkan produk. Dari peningkatan industri kecil inilah diharapkan memberi kontribusi yang cukup baik untuk mendorong bidang-bidang lain supaya bisa maju dan berkembang. Oleh karena sifatnya yang padat karya, tidak memerlukan modal besar dan tingkat keahlian yang khusus serta adanya dukungan dari pemerintah maka industri kecil ini dapat terus berkembang dan diharapkan dapat mengatasi masalah ketenagakerjaan dan pengangguran.

Salah satu industri kecil yang ada di propinsi Bengkulu adalah usaha Meubel Sri Rotan yang terletak di jalan Raya Bengkulu-Curup Km. 12 Taba Pasma. Usaha ini bergerak dalam bidang pembuatan aneka meubel dan kerajinan yang berbahan dasar rotan, seperti kursi tamu, kursi teras, kursi malas, kursi makan, tempat tidur, lemari, rak buku, sekat

ruangan, kap lampu, tempat koran, tudung saji, dan lain sebagainya.

Aktivitas atau kegiatan yang dilakukan oleh usaha Meubel Sri Rotan ini adalah merakit rotan menjadi satu set meubel kursi tamu. Kegiatan ini dalam proses pengerjaannya dilakukan mengikuti rangkaian antara kegiatan yang satu dengan kegiatan yang lain sampai proses merakit selesai, melalui beberapa tahapan atau urutan pekerjaan yang masing-masing kegiatan diketahui pasti dan memiliki tenggang waktu yang berbeda. Karena melalui beberapa tahap pengerjaan, proses pembuatan satu set meubel kursi tamu ini menghabiskan waktu lebih dari satu bulan. Hal ini tentunya secara tidak langsung merugikan pihak meubel, baik dari segi waktu ataupun tenaga.

Aljabar max-plus digunakan untuk memodelkan dan menganalisis jaringan, seperti penjadwalan proyek, sistem produksi, jaringan antrian, dan sebagainya. Pemodelan dan analisa suatu jaringan dengan pendekatan ini dapat memberikan hasil analitis dan lebih mudah pada komputasinya.

Berdasarkan uraian di atas maka penulis akan membahas suatu pemakaian dari aljabar max-plus dalam memodelkan proses produksi meubel pada usaha Meubel Sri Rotan. Dari hasil pengolahan dengan menggunakan aljabar max-plus, diharapkan nantinya akan memberikan suatu jadwal yang periodik pada setiap tahap pengerjaan sehingga tidak menghabiskan banyak waktu dalam proses pembuatan satu set meubel sri rotan.

2. Aljabar Max-Plus Dan Notasinya

Aljabar Max-Plus terdiri dari himpunan $\mathbf{R}_\varepsilon = \mathbf{R}\cup\{\varepsilon\}$, dimana R adalah himpunan bilangan real dan $\varepsilon = -\infty$ yang dikaitkan dengan dua operasi maksimum (max) dan tambah (+), dengan notasi $\oplus$ menyatakan operasi maksimum dan $\otimes$ menyatakan operasi tambah. Sehingga untuk suatu operasi terhadap dua variabel a dan b yaitu $a \oplus b$ berarti max(a,b) dan $a \otimes b$ berarti a + b. Notasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada Aljabar Max−Plus masing−masing mempunyai kemiripan dengan operasi tambah (+) dan kali (x) pada aljabar biasa. Untuk selanjutnya untuk operasi $a^{\otimes b}$ = ab menyatakan perkalian a dan b dalam aljabar biasa.

2.1 Beberapa definisi dalam Aljabar Max-Plus

Definisi 1:
Diberikan $\mathbf{R}_\varepsilon = \mathbf{R}\cup\{\varepsilon\}$ dengan $\varepsilon = -\infty$, Pada $\mathbf{R}_\varepsilon$, $\forall$a,b $\in \mathbf{R}_\varepsilon$ didefinisikan sebagai operasi berikut: $a \oplus b$ = max(a, b) dan $a \otimes b = a+b$

i. $(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring komutatif idempoten dengan elemen netral $\varepsilon=-\infty$ dan elemen satuan e = 0.

ii. $(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semifield, yaitu bahwa $(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring komutatif di mana untuk setiap a $\in$ **R** terdapat -a sehingga berlaku $a \otimes (-a) = 0$.

Untuk selanjutnya $(\mathbf{R}\varepsilon, \oplus, \otimes)$disebut dengan ***Aljabar Max-Plus***, yang dinotasikan dengan $\mathbf{R}_{\max}$. Relasi "$\preceq_m$" yang didefinisikan pada $\mathbf{R}_{\max}$ sebagai berikut $x \preceq_m y$ jika $x \oplus y = y$, merupakan ***urutan parsial*** pada $\mathbf{R}_{\max}$. Lebih lanjut relasi ini merupakan ***urutan total*** pada $\mathbf{R}_{\max}$. Pangkat k dari lemen x $\in$ **R** dilambangkan dengan $x^{\otimes k}$ didefinisikan $x^{\otimes 0} = 0,\ x^{\otimes k} = x \otimes x^{\otimes k-1}$.

Definisi 2:
Operasi dan $\otimes$ pada $\mathbf{R}_{\max}$ dapat diperluas untuk operasi-operasi matriks dalam $R_{\max}^{mxn}$, di mana $R_{\max}^{mxn}$ = {A = (A_{ij})|Aij $\in R_{\max}^{mxn}$, untuk i = 1, 2,..., m dan j = 1, 2,..., n} sehingga:

i. Untuk A, B $\in R_{\max}^{mxn}$ didefinisikan $A \oplus B$, dengan $(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$.

ii. Untuk A$\in R_{\max}^{mxp}$, B$\in R_{\max}^{pxn}$ didefinisikan $A \otimes B$, dengan $(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{p} (a_{ij} \otimes b_{kj})$

iii. Matriks E $\in R_{\max}^{nxn}$ dengan $(E)_{ij} = \begin{cases} 0, & jika\ \ i = j \\ \varepsilon, & jika\ i \neq j \end{cases}$

iv. Matriks $\varepsilon \in R_{\max}^{mxn}$ dengan $(\varepsilon)_{ij} = \varepsilon$, $\forall$i,j

2.2 Definisi Graph dalam Aljabar Max-Plus

Diberikan graph berarah G = (V, A) dengan V adalah suatu himpunan berhingga tak kosong yang anggotanya disebut titik dan A adalah suatu himpunan pasangan terurut titik-titik pada garis V.

Suatu lintasan dalam graph berarah G adalah suatu barisan berhingga garis $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots, (i_{l-1}, i_l)$ dengan $(i_k, i_{k+1})\in A$ untuk suatu $l\in N$, di mana N = himpunan semua bilangan asli, dan k = 1, 2, ... , l-1. Titik i_1 disebut titik awal lintasan dan titik i_l disebut titik akhir lintasan. Suatu lintasan disebut sirkuit jika titik awal dan titik akhirnya sama. Suatu graph berarah G = (V, A) dengan V = {1, 2, , ... , n} dikatakan ***strongly connected*** jika untuk setiap i, j$\in$V, i$\neq$j , terdapat suatu lintasan dari i ke j. Suatu graph yang memuat sirkuit disebut graph siklik, sedangkan suatu graph yang tidak memuat sirkuit disebut graph taksiklik.

Graph berarah G dikatakan berbobot jika setiap garis (j, i) $\in$ A dikawankan dengan suatu bilangan real A_{ij}. Bilangan real A_{ij} disebut bobot garis (j, i), dilambangkan dengan w(j, i). Graph preseden dari matriks A$\in$ $R_{\max}^{nxn}$ adalah graph berarah berbobot G(A) = (V, A) dengan V = {1, 2, ... , n}, A = {(j, i) | w(i, j) = $A_{ij} \neq \varepsilon$, $\forall$i, j }. Sebaliknya untuk setiap graph berarah berbobot G = (V, A) selalu dapat didefinisikan suatu matriks A$\in$ $R_{\max}^{nxn}$ dengan A_{ij} = $\begin{cases} w_{ij}, & jika\ (i,j) \in A \\ \varepsilon, & jika\ (i,j) \in \neq A \end{cases}$, yang disebut matriks bobot graph G.

3. Sistem Produksi Meubel Rotan

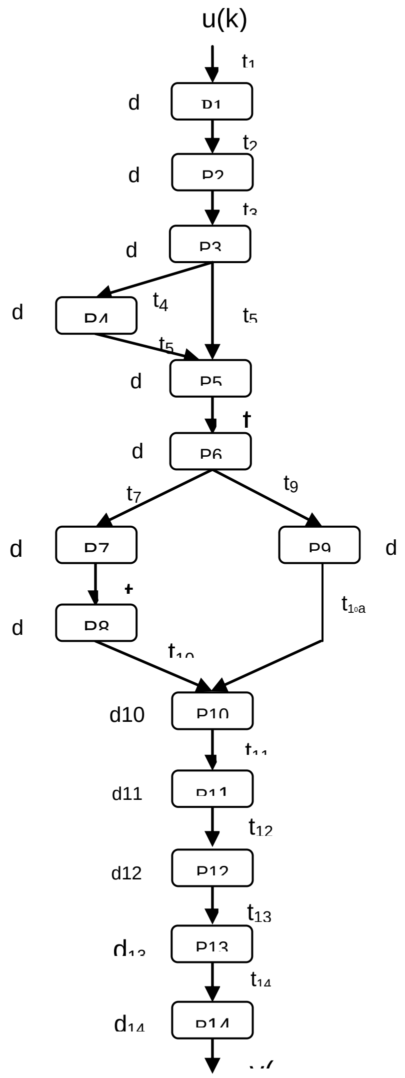
Kegiatan Proses Produksi

Kegiatan utama yang dilakukan usaha meubel ini adalah mengolah rotan mentah menjadi barang yang mempunyai nilai jual tinggi, salah satunya diolah menjadi satu set kursi tamu. Berikut ini adalah proses kerja dalam pembuatan meubel kursi tamu model siput/ keong : Pemanggangan/ pengovenan rotan, Penjemuran I, Pelurusan rotan manau, Pengupasan kulit rotan sega, Pengukuran, dan pemotongan rotan, Pemanasan rotan dan pembengkokan rotan, Pembentukan rotan, Pembuatan bagian kerangka kursi, *Assembling*, Penganyaman, Pengerokan, Pengamplasan, Pencucian, Perangsangan warna, Pengkilatan kursi, Penjemuran II, dan Pengepakan.

Tabel 1. Urutan kegiatan Proses produksi

No	Aktivitas	Simbol
1.	**Pengolahan Bahan Baku**	
	a. Pengovenan rotan	P1
	b. Penjemuran I	P2
	c. Pelurusan rotan	P3
	d. Pengupasan kulit rotan	P4
2.	**Pemotongan dan Pembengkokan**	
	a. Pengukuran dan pemotongan rotan	P5
	b. Pembentukan bagian kerangka meubel	P6
	c. Pemanasan dan pembengkokan	P7
3.	***Assembling***	
	a. Perakitan bagian-bagian meubel	P8
	b. Pembuatan anyaman pitrit	P9
	c. Pembuatan kor	P10
4.	***Finishing***	
	a. Pengerokan, pengamplasan, pencucian	P11
	b. Perangsangan warna	P12
	c. Penjemuran II	P13
	d. Pengepakan	P14

Berdasarkan urutan kegiatan proses produksi tersebut, diperoleh diagram produksi:



4. Aljabar Max-Plus Pada Produksi Meubel Rotan

Dalam sistem produksi tersebut, diasumsikan tidak terjadi kerusakan atau tidak ada kendala yang terjadi dalam proses baik pada saat penjemuran dan pengeringan maupun cuaca yang tidak memungkinkan untuk terjadi penjemuran. Setiap tempat atau unit pemroses diasumsikan mulai berjalan ketika bahan baku yang dibutuhkan telah tersedia (tidak ada waktu tunggu) untuk setiap unit pemroses.

Setelah diperoleh diagram produksi dan table-tabel tersebut, maka diperlukan beberapa definisi untuk memudahkan pemodelan :

- $u(k)$ adalah waktu dimana bahan baku dimasukkan ke sistem untuk saat yang ke$-(k+1)$
- $x(k)$ adalah waktu dimana pemroses yang ke-I mulai bekerja saat yang ke-k
- $y(k)$ adalah waktu dimana produk selesai saat yang ke-k meninggalkan sistem

Waktu pemroses P1 mulai bekerja untuk saat yang ke-*(k+1)* jika telah dimasukkan bahan baku ke sistem, dan selanjutnya bahan baku tersebut merupakan input pemroses P1 pada saat $t = u(k) + 5$. Selanjutnya karena waktu pemrosesan pada P1 adalah $d_1 = 2$ satuan waktu, maka produk diantara yang ke-k akan meninggalkan P1 pada saat $t = x_1(k) + 2$ sehingga diperoleh persaman berikut:

$$x_1(k+1) = \max(x_1(k) + d_1, u(k) + t_1)$$
$$x_1(k+1) = \max(x_1(k) + 2, u(k) + 5)$$

Persamaan di atas mempunyai makna bahwa pada saat $k = 0$ maka di proses 1 yaitu $x_1(0)$, bahan baku telah masuk atau tersedia di proses 1, $u(0)$ sehingga proses 1 bisa dilaksanakan.

Dengan menggunakan pendekatan yang sama seperti halnya pada unit pemroses P1, maka unit pemroses P2, P3 dan seterusnya.

Untuk semua $k \epsilon Z$ sistem dari persamaan-persaman di atas dapat ditulis dalam symbol $\oplus$ dan $\otimes$, diperolah :

$$x_1(k+1) = 2 \otimes x_1(k) \oplus 5 \otimes u(k)$$
$$x_2(k+1) = 8 \otimes x_1(k) \oplus 2 \otimes x_2(k)$$
$$\vdots$$
$$x_{13}(k+1) = 4 \otimes x_{12}(k) \oplus 2 \otimes x_{13}(k)$$
$$x_{14}(k+1) = 3 \otimes x_{13}(k) \oplus 2 \otimes x_{14}(k)$$
$$y(k) = 3 \otimes x_{14}(k)$$

Selanjutnya evolusi sistem pada persamaan di atas dibuat menjadi :

$$x(k+1) = A \otimes x(k) \oplus \varepsilon \otimes u(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$
$$y(k) = C \otimes x(k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Evolusi dari keadaan sistem dapat dibuat dalam bentuk :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A \otimes x(k) \oplus B \otimes u(k) \\ &= A \otimes x(k) \oplus B \otimes y(k) \end{aligned}$$

($u(k)$= $y(k)$ karena waktu pada saat produksi telah selesai dilaksanakan pada waktu ke-*k* itu menunjukkan bahwa itu adalah waktu untuk memulai kembali produksi pada waktu ke-*k* sehingga tidak terjadi telat produksi). Sehingga

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A \otimes x(k) \oplus B \otimes C \otimes x(k) \\ &= \bar{D} \otimes x(k) \end{aligned}$$

dimana $\bar{D} = A \oplus B \otimes C$

Nilai $\bar{D}$ dihitung dengan menggunakan *Aljabar Max-plus Algebra toolbox*, scilab versi 101 [**3**]. Selanjutnya dapat dikaji kedinamikan dari sistem dengan mensimulasikan keadaan awal.

Dalam membuat simulasi dari sistem yang telah dibuat dengan menggunakan scilab, diperoleh hasil berikut :

x =

```
0. 8. 11. 15. 18. 22. 29. 31. 35. 38. 42. 48. 56.
0. 8. 16. 19. 23. 26. 30. 37. 39. 43. 46. 50. 56.
0. 3. 11. 19. 22. 26. 29. 33. 40. 42. 46. 49. 53.
0. 5. 8.  16. 24. 27. 31. 34. 38. 45. 47. 51. 54.
0. 3. 8.  14. 22. 27. 30. 34. 37. 43. 48. 50. 54.
0. 3. 6.  11. 17. 25. 30. 33. 37. 40. 46. 51. 53.
0. 4. 7.  10. 15. 21. 29. 34. 37. 41. 44. 50. 55.
0. 2. 6.  9.  12. 17. 23. 31. 36. 39. 43. 46. 52.
0. 4. 7.  10. 15. 21. 29. 34. 37. 41. 44. 50. 55.
0. 7. 9.  13. 16. 20. 26. 34. 39. 43. 46. 50. 55.
0. 4. 11. 13. 17. 20. 24. 30. 38. 43. 47. 50. 54.
0. 3. 7.  14. 16. 20. 23. 27. 33. 41. 46. 50. 53.
0. 4. 7.  11. 18. 20. 24. 27. 31. 37. 45. 50. 54.
0. 3. 7.  10. 14. 21. 23. 27. 30. 34. 40. 48. 53.
```

y =

```
3. 6. 10. 13. 17. 24. 26. 30. 33. 37. 43. 51. 56.
```

Terlihat bahwa hasil yang diperoleh belum memperlihatkan suatu periodic untuk keadaan awal $x_0 = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]'$. Sehingga untuk menentukan keadaan awal yang dapat menghasilkan jadwal yang periodic yang mengacu pada vector eigen dengan periode yang sesuai dengan nilai eigen dari matriks $\bar{D}$, diperoleh :

vx =

```
215.58333
219.16667
217.75
218.33333
216.91667
215.5
215.08333
212.66667
215.08333
215.66667
215.25
213.83333
213.41667
212.
```

lam =

```
4.4166667
```

Terlihat bahwa mulai dari awal keadaan sistem sudah periodik dengan periode sama dengan 4.4166667 (nilai eigen). Tabel 2 di bawah ini menunjukkan keadaan awal terbaik untuk memulai saat keadaan sistem aktif, yaitu saat waktu awal masing-masing proses P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8, P9, P10, P11, P12, P13, dan P14 aktif. Sebab dengan keadaan awal ini, kita akan memperoleh suatu jadwal dari setiap mesin aktif secara teratur dengan periode sama dengan 4.4166667.

Tabel 2. Keadaan awal keadaan sistem aktif

Hari ke-	Konversi Hari : Jam
3.58333	Rabu, jam 13.50
7.16667	Sabtu, jam 04.00
5.75	Jumat, jam 18.00
6.33333	Sabtu, jam 07.50
4.91667	Kamis, jam 22.00
3.5	Rabu, jam 12.00
3.08333	Rabu, jam 01.50
0.66667	MInggu, jam 16.00
3.08333	Rabu, jam 01.50
3.66667	Rabu, jam 16.00
3.25	Rabu, jam 06.00
1.83333	Senin, jam 19.50
1.41667	Senin, jam 10.00
0.	Minggu, jam 00.00

5. Kesimpulan

Dalam paper ini telah dibahas pemakaian aljabar max-plus pada sistem proses produksi meubel rotan. Kemudian dengan menggunakan software open source scilab 5.1.1 dan *Max-Plus Algebra Toolbox*, ver. 1.01. juga telah dikaji perilaku dinamik sistem sehingga diperoleh vector eigen dan nilai eigen untuk mendapatkan jadwal produksi meubel yang periodic.

Daftar Pustaka

[1] Subiono, 2001, ***Terapan aljabar max-plus pada proses produksi-perakitan, Seminar Nasional Matematika***, UGM-Jogya.

[2] Subiono, 2002, **Pemodelan suatu sistem jaringan kereta dengan menggunakan jadwal keberangkatan kereta**, Jounal Natural vol.6, pp.172-177.

[3] Subiono, 2009, **Max-Plus Algebra Toolbox**, ver. 1.01