ISSN 0216-2393

Jurnal Gradien Vol.4 No.1 Januari 2008 : 333-336

Kekonvergenan Suatu Barisan Pada Ruang Norm-2

Ulfasari Rafflesia

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Bengkulu, Indonesia

Diterima 3 Oktober 2007; Disetujui 20 Desember 2007

Abstrak - Pada dimensi hingga ruang norm-2 akan diperlihatkan sifat-sifat ruang norm-2 dan berdasarkan sifat-sifat tersebut akan dibuktikan kekonvergenan suatu barisan pada ruang norm-2.

Kata Kunci : Ruang Norm-n, Ruang Vektor, Barisan Konvergen

1. Pendahuluan

Konsep tentang ruang matriks-2 dan ruang norm-2 pertama kali diperkenalkan oleh Gahler pada pertengahan tahun 1960-an. Sejak itu banyak peneliti yang mencoba mengkaji lebih jauh tentang ruang norm-2 tersebut, seiring dengan itu dikemukakan berbagai hasil tentang sifat-sifat ruang norm itu sendiri. Konsep dari ruang norm-2 adalah bahwa ruang norm-2 merupakan ruang norm. Selanjutnya berdasarkan sifat-sifat dan fakta yang ada pada ruang norm-2, akan dibuktikan kekonvergenan suatu barisan pada ruang norm-2.

2. Ruang Norm-2

Misalkan X adalah ruang vektor. Norm pada X adalah suatu fungsi dari X ke R yang dinotasikan oleh $\|\cdot\| : X \to R$, yang memenuhi sifat-sifat berikut :

i. $\|x\| \geq 0$ untuk semua $x \in X$

ii. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

iii. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ untuk semua $\alpha \in R$

iv. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ untuk semua $x, y \in X$

Selanjutnya pasangan $(X, \|\,.\,\|)$ disebut ruang Norm.

Defenisi 2.1

Misalkan X adalah suatu ruang vektor berdimensi d , $1 \leq d < \infty$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in X$. Norm $(\|x\|_1)$, $(\|x\|_2)$, $(\|x\|_p)$ dan $(\|x\|_\infty)$ atas X didefinisikan sebagai berikut:

a. $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_d|$

b. $\|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_d|^2)^{1/2}$

c. $\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_d|^p)^{1/p}$, $p \in N$

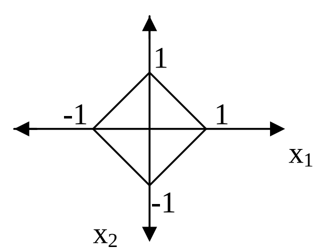
dengan $1 \leq p < \infty$

d. $\|x\|_\infty = max\{ |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_d| \}$

Contoh :

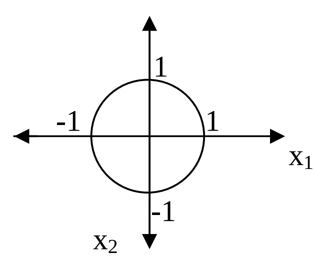
Misal $x = (x_1, x_2)$ *di* R^2 dengan $\|x\| = 1$, maka :

a. $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| = 1$

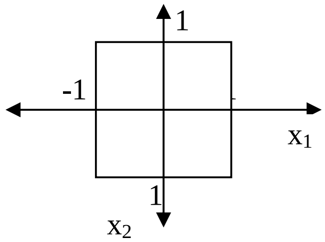


b. $\|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2)^{1/2} = 1$

maka $|x_1|^2 + |x_2|^2 = 1$ (Persamaan lingkaran)



c. $\|x\|_\infty = max \{ |x_1|, |x_2| \} = 1$



Definisi 2.2

Misal X adalah ruang vektor berdimensi $d, 2 \leq d < \infty$, norm-2 pada X adalah suatu fungsi $\|.,.\| : X \times X \rightarrow R$ dan untuk $\forall x, y, z \in X$ dipenuhi sifat-sifat berikut :

a. $\|x, y\| = 0 \Leftrightarrow x$ dan y adalah bergantung linier

b. $\|x, y\| = \|y, x\|$

c. $\|x, \alpha y\| = |\alpha| \|x, y\|$, $\alpha \in R$

d. $\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$ untuk semua $x \in X$

Selanjutnya pasangan $(X, \|.,.\|)$ disebut ruang norm-2.

3. Kekonvergenan Barisan pada Ruang Norm-2.

Misal (x_n) di ruang norm. X konvergen ke x di X jika $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in N$ sehingga $\forall n \geq N_0$ maka berlaku $\|x - x_n\| < \varepsilon$ atau dengan kata lain $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$

Teorema 3.1.

Misalkan $(X, \|.,.\|)$ suatu ruang norm-2 $\forall x, y, z \in X, \alpha \in R$ maka:

a. $\|x, y\| \geq 0$

b. $\|x, y + \alpha x\| = \|x, y\|$

c. Jika x, y, z bergantung linier maka

$$\|x, y + z\| = \|x, y\| + \|x, z\|$$

atau

$$\|x, y - z\| = \|x, y\| - \|x, z\|$$

Bukti:

Misalkan $(X, \|.,.\|)$ suatu ruang norm-2 $\forall x, y, z \in X, \alpha \in R$.

a. Akan dibuktikan $\|x, y\| \geq 0$

Jelas bahwa $\|x, y\| \geq 0$ jika x dan y bebas linier, dari definisi ruang norm-2, jika x dan y bergantung linier maka $\|x, y\| = 0$. Akibatnya $\|x, y\| \geq 0$

b. Akan dibuktikan $\|x, y + \alpha x\| = \|x, y\|$, yaitu dengan menunjukkan :

$\|x, y + \alpha x\| \leq \|x, y\|$ dan $\|x, y + \alpha x\| \geq \|x, y\|$

(i). $\|x, y + \alpha x\| \leq \|x, y\| + \|x, \alpha x\| \leq \|x, y\| + 0$

(karena $x, \alpha x$ bebas linier) $\leq \|x, y\|$

Jadi $\|x, y + \alpha x\| \leq \|x, y\|$

(ii). $\|x, y\| = \|x, y + \alpha x - \alpha x\| \leq \|x, y + \alpha x\| + \|x, -\alpha x\|$

$\leq \|x, y + \alpha x\| + 0 \leq \|x, y + \alpha x\|$

Jadi $\|x, y + \alpha x\| \geq \|x, y\|$

c. Misal x, y, z bergantung linier.

Akan dibuktikan $\|x, y + z\| = \|x, y\| + \|x, z\|$ dan $\|x, y - z\| = \|x, y\| + \|x, z\|$

(i). Akan dibuktikan $\|x, y + z\| = \|x, y\| + \|x, z\|$, yaitu dengan menunjukkan

$\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$ dan

$\|x, y\| + \|x, z\| \leq \|x, y + z\|$

a. Dari Definisi norm-2 diperoleh

$$\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\| \quad (1)$$

b. Akan ditunjukkan

b. $\|x, y\| + \|x, z\| \leq \|x, y + z\|$

Karena x, y, z bergantung linier maka $y = \alpha x, z = \beta x$

Akibatnya $\|x, y\| + \|x, z\| \leq \|x, \alpha x\| + \|x, \beta x\| = 0$

Pilih $\|x, y + z\| \geq 0$ sehingga

$$\|x, y\| + \|x, z\| \leq \|x, y + z\| \quad (2)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh

$$\|x, y + z\| = \|x, y\| + \|x, z\|$$

(ii) Akan dibuktikan $\|x, y - z\| = \|x, y\| + \|x, z\|$, yaitu menunjukkan

$$\|x, y - z\| = \|x, y\| + \|x, z\|$$

dan

$$\|x, y\| + \|x, z\| \leq \|x, y - z\|$$

a. Dari Definisi norm-2 diperoleh

$$\|x, y - z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\| \quad (3)$$

b. Akan ditunjukkan

$$\|x,y\|+\|x,z\|\le\|x,y-z\|$$

Karena x,y,z bergantung linier maka

$$y=\alpha x, z=\beta x$$

Akibatnya

$$\|x,y\|+\|x,z\|\le\|x,\alpha x\|+\|x,\beta x\|=0$$

Pilih $\|x,y-z\|\ge 0$ sehingga

$$\|x,y\|+\|x,z\|\le\|x,y-z\| \qquad (4)$$

Dari (3) dan (4) diperoleh

$$\|x,y-z\|=\|x,y\|+\|x,z\|$$

Defenisi 3.2

Misal X adalah ruang norm-2. Suatu barisan (x_n) di X dikatakan konvergen ke x di X jika dan hanya jika $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x,y\|=0$, $\forall y\in X$ atau dengan kata lain $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$.

Lema 3.3

Limit dari suatu barisan konvergen adalah tunggal.

Bukti:

Misal (x_n) adalah barisan konvegen. Andaikan bahwa limit (x_n) tidak tunggal.

Misalkan (x_n) konvergen pada dua titik $x,y\in X$, $x\ne y$ maka

$(x_n)\to x$ berarti $\forall\varepsilon>0$ terdapat $N_1\in N$ sehingga $\forall n\ge N_1$ berlaku $\|x_n-x,z\|,\forall z\in X$

$(x_n)\to y$ berarti $\forall\varepsilon>0$ terdapat $N_2\in N$ sehingga $\forall n\ge N_2$ berlaku $\|x_n-y,z\|,\forall z\in X$

Pilih $\varepsilon=\frac{1}{2}\|x-y,z\|$, $z\in X$ dengan $\|x-y,z\|\ne 0$

Perhatikan bahwa untuk $n\ge N$ dengan $N=maks\{N_1,N_2\}$ maka

$$\begin{aligned}\|x-y,z\| &= \|x-x_n+x_n-y,z\|\\ &\le \|x-x_n,z\|+\|x_n-y,z\|\\ &< \frac{1}{2}\|x-y,z\|+\frac{1}{2}\|x-y,z\|\\ &< \|x-y,z\|\end{aligned}$$

Jelas tidak mungkin $\|x-y,z\|<\|x-y,z\|$

Jadi haruslah (x_n) konvergen ke suatu titik sehingga limit (x_n) tunggal.

Ini berarti limit barisan konvergen adalah tunggal.

Misalkan $(X,\|.,.\|)$ suatu ruang norm-2, yang berdimensi d dengan $2\le d<\infty$. Misalkan $\{u_1,u_2,...,u_d\}$ adalah basis untuk X ,maka diperoleh beberapa lema berikut:

Lema 3.4

Suatu barisan (x_n) di X dikatakan konvergen ke x di X jika dan hanya jika $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x,u_i\|=0,\forall i=1,..,d$

Bukti:

$(\Rightarrow)$ Misal $(x_n)\to X$ di X. Akan ditunjukkan $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x,u_i\|=0$

Dari definisi $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x,y\|=0$, $\forall y\in X$

Karena $\{u_1,u_2,...,u_d\}$ adalah basis untuk X maka $u_1,u_2,...,u_d\in X$

Akibatnya $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x,u_i\|=0$

$(\Leftarrow)$ Misal $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x,u_i\|=0$. Akan ditunjukkan $(x_n)\to X$ di X.

Karena $\{u_1,u_2,...,u_d\}$ adalah basis untuk X maka $\forall y\in X$ dapat ditulis

$$y=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\ldots+\alpha_du_d \ ,$$

untuk $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_d\in R$

Perhatikan bahwa :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\|x_n-x,y\| &= \lim_{n\to\infty}\|x_n-x,\alpha_1u_1,...,\alpha_du_d\|\\ &\le \lim_{n\to\infty}\{|\alpha_1|\,\|x_n-x,u_1\|+\ldots+|\alpha_d|\,\|x_n-x,u_d\|\}\\ &= |\alpha_1|\lim_{n\to\infty}\|x_n-x,u_1\|+\ldots+|\alpha_d|\lim_{n\to\infty}\|x_n-x,u_d\|\end{aligned}$$

Diketahui $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x,u_i\|=0,\forall i=1,..,d$

Maka $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x,u_1\|=\ldots=\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x,u_d\|=0$

Akibatnya

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x,y\|\le 0 \qquad (5)$$

Dari definisi diperoleh $\|x_n-x,y\|>0$

Sehingga

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x,y\|\ge 0 \qquad (6)$$

Dari (1) dan (2) disimpulkan

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x,y\|=0$$

Ini berarti (x_n) di X konvergen ke x di X

Lema 3.5

Suatu barisan (x_n) di X konvergen ke x di X jika dan hanya jika $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\|_\infty = 0$

Bukti:

($\Rightarrow$) Misal $(x_n) \to X$ di X. Akan ditunjukkan

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\|_\infty = 0$$

Karena $(x_n) \to X$ dari lema 3.4 diperoleh

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x, u_i\| = 0$$

Akibat $\lim_{n\to\infty} maks\{\|x_n - x, u_i\|, i = 1,...,d\} = 0$

Perhatikan bahwa

$$maks\{\|x_n - x, u_i\|, i = 1,...,d\} = \|x_n - x\|_\infty$$

Maka $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\|_\infty =$

$$\lim_{n\to\infty} maks\{\|x_n - x, u_i\|, i = 1,...,d\} = 0$$

Jadi $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\|_\infty = 0$

($\Leftarrow$) Misal $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\|_\infty = 0$. Akan ditunjukkan $(x_n) \to X$.

Perhatikan bahwa:

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\|_\infty = \lim_{n\to\infty} maks\{\|x_n - x, u_i\|, i = 1,...,d\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\|x_n - x, u_i\| = 0$$

Dari lema 3.4 maka $(x_n) \to X$ di X. ■

4. Kesimpulan

Pada ruang norm-2 telah diuraikan sifat-sifat ruang norm. Dengan menggunakan fakta dan sifat-sifat dari ruang norm-2 tersebut, terbukti kekonvergenan suatu barisan pada ruang norm-2.

Daftar Pustaka

[1] Anton, Howard. 1998. *Aljabar Linier Elementer*. Edisi kelima. Penerbit Erlangga. Jakarta.

[2] Bartle G. Robert & Sherbert R Donald. 1994. *Introduction to Real Analysis*. John Willey & Sons.

[3] Bartle G. Robert & Sherbert R Donald. 1975. *The Element Of Real Analysis*. Second Edition. Willey International Editorn.

[4] Herstain, I. N. *Topic in Algebra*. John Wiley & Sons. Second Edition. United State of America.

[5] Jacob, Bill. 1990. *Linear Algebra*. W. H. Freeman an Company. New York.

[6] Light, W. A. 1990. *An Introduction to Abstract Analysis*. First Edition. Chapman and Hall UK.