ISSN 0216-2393

Jurnal Gradien Vol 8 No 1 Januari 2012: 763.-774

Pembauran (*Confounding*) Pada Percobaan Faktorial Tiga Taraf

Nur Afandi, Sigit Nugroho dan Pepi Novianti

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Bengkulu, Indonesia

Diterima 15 Oktober 2011; Disetujui 25 Desember 2011

Abstrak - Pada percobaan faktorial tiga taraf, perlakuan yang dihasilkan cukup besar bahkan untuk jumlah faktor yang sedikit. Besarnya perlakuan yang dihasilkan ini terkadang menyulitkan peneliti untuk memperoleh blok lengkap yang homogen. Tujuan dari penulisan artikel ini adalah mengkaji sistem pembauran pada percobaan faktorial tiga taraf. Metode yang digunakan adalah studi literatur dan teladan penerapan. Dari hasil penelitian disimpulkan bahwa penggunaan blok tak lengkap mengakibatkan tercampurnya beberapa pengaruh perlakuan dengan pengaruh blok. Hal inilah yang disebut sebagai Sistem Pembauran (*System of Confounding*). Penempatan perlakuaan ke dalam blok-blok tak lengkap dilakukan berdasarkan pengaruh utama faktor atau interaksi yang terbaur dengan pengaruh blok.

Kata kunci : **Faktorial 3 taraf, blok tak lengkap, Sistem Pembauran, pengaruh utama faktor, pengaruh interaksi.**

1. Pendahuluan

Perancangan percobaan merupakan metode percobaan yang sistematis dan terarah sehingga akan menghasilkan percobaan yang tidak bias. Tujuan perancangan percobaan adalah untuk memprediksi agar masing-masing kelompok yang diberikan perlakukan dapat dilihat perbedaannya dengan jelas, sehingga diperoleh kesimpulan mengenai pengaruh atau efek dari perlakuan tertentu.

Percobaan Faktorial sendiri pada dasarnya merupakan percobaan yang dilakukan dengan menggabungkan atau mengkombinasikan taraf dari setiap faktor yang ada sebagai perlakuannya. Percobaan dengan menggunakan f faktor dengan t taraf untuk setiap faktornya disimbolkan dengan percobaan faktorial t^f. Sebagai contoh Percobaan faktorial 2^2, artinya percobaan dilakukan dengan 2 faktor dimana setiap faktor memiliki 2 taraf. Penyimbolan juga dapat dilakukan dengan cara yang berbeda, misalnya Percobaan Faktorial 3 x 3 yang berarti bahwa percobaan terdiri dari dua faktor dengan tiga taraf untuk setiap faktor.

Banyaknya perlakuan pada percobaan faktorial merupakan kombinasi taraf dari masing-masing faktor, sehingga banyaknya perlakuan yang dihasilkan sering kali besar. Semakin banyak jumlah faktor atau pun jumlah taraf yang dilibatkan, maka banyak perlakuan pun akan semakin besar. Besarnya jumlah perlakuan ini terkadang membuat jumlah blok yang cukup atau pun blok yang homogen tidak memungkinkan untuk diperoleh. Karena alasan tersebut, penggunaan blok yang tak lengkap akan sangat membantu.

Blok yang tak lengkap mengakibatkan beberapa perlakuan akan berada dalam satu blok yang sama, sedangkan perlakuan lainnya terpisah ke dalam blok-blok yang berbeda. Sehingga hal ini akan menyebabkan adanya informasi mengenai pengaruh suatu perlakuan yang harus dikorbankan karena terbaur dengan pengaruh dari pemblokan. Adanya pembauran pengaruh perlakuan dengan pengaruh pemblokan inilah yang disebut sebagai Sistem Pembauran (*System of Confounding*). Pada percobaan faktorial 3^n, dimana masing-masing n faktor memiliki tiga taraf, akan menghasilkan jumlah perlakuan yang besar bahkan untuk jumlah faktor yang kecil. Untuk itu dalam faktorial 3^n sangatlah perlu untuk dikenalkan konsep Sistem Pembauran.

Tujuan penulisan ini adalah Mengetahui prosedur percobaan faktorial dengan menggunakan tiga taraf. Tujuan lainnya adalah mengetahui cara mengatasi adanya permasalahan jumlah perlakuan yang lebih besar dibandingkan dengan ukuran blok yang homogen pada Percobaan Faktorial dengan menggunakan 3 taraf dan juga mengetahui analisis keragaman dari Sistem Pembauran (*Confounding*) pada Percobaan Faktorial 3 taraf berjarak sama.

2. Sistem Pembauran Pada Percobaan Faktorial 2^n

2.1 Percobaan Faktorial 2^n

Percobaan faktorial 2^n, artinya percobaan terdiri dari n faktor dimana masing-masing faktor memiliki dua taraf. Misalnya faktor suhu dan tekanan yang masing-masing memiliki taraf "tinggi" dan "rendah", faktor waktu yang memiliki taraf "cepat" dan "lambat", dan lain sebagainya. Faktorial 2^n merupakan percobaan faktorial yang menghasilkan perlakuan yang paling sedikit dari n faktor. Sehingga analisis dalam Faktorial 2^n akan lebih mudah. Untuk memahami percobaan faktorial 2^n, maka akan dikenalkan notasi dan beberapa istilah yang berkaitan dengan percobaan faktorial 2^n.

2.1.1 Notasi dan Beberapa Istilah dalam Percobaan Faktorial 2^n

Faktor adalah sejenis perlakuan, dan di dalam percobaan faktorial, setiap faktor memiliki beberapa perlakuan yang disebut sebagai taraf [**12**]. Definisi formal dari faktor dan taraf dapat dijelaskan sebagai berikut [**11**]

Definisi faktor

Untuk t yang tidak nol, $G_1, G_2, \dots, G_t$ yang berturut-turut memiliki kardinalitas $k_1, k_2, \dots, k_t$ dimana $k_i > 1$ untuk semua i. Masing-masing himpunan G_i, yang akan dihubungkan dengan simbol F_i, akan disebut sebagai *faktor ke-i*.

Definisi taraf

Anggota dari G_i ketika diasosiasikan dengan simbol F_i akan disebut dengan *level atau taraf dari faktor ke-i*.

Istilah lain yang digunakan dalam percobaan faktorial antara lain adalah pengaruh sederhana, pengaruh utama dan interaksi. Pengaruh sederhana merupakan selisih level tertinggi suatu faktor dengan level terendahnya, dan rata-rata dari pengaruh sederhana ini disebut sebagai pengaruh utama. Interaksi adalah kegagalan level suatu faktor untuk berperilaku sama pada level-level atau terhadap perubahan level lain [**13**] .

Suatu percobaan terdiri dari n faktor, yaitu $A_1, A_2, \dots, A_n$ sedemikian sehingga taraf dari faktor A_i adalah m_i, akan menghasilkan perlakuan sebanyak $\prod_{i=1}^{n} m_i$, yaitu perkalian taraf dari setiap faktor yang ada [**8**]. Jadi jika taraf dari setiap faktor adalah 2 $(m_i = 2, \forall\, i)$, yaitu a_{i_0} dan a_{i_1} untuk $i = 1, 2, \dots, n$, maka dihasilkan sebanyak 2^n kombinasi taraf atau perlakuan. Kombinasi taraf atau perlakuan yang ada dapat dituliskan dengan simbol yang berbeda sebagai berikut:

1. Bentuk eksplisit
$$a_{1_{j_1}}, a_{2_{j_2}}, \dots, a_{n_{j_n}} \qquad (2.1)$$
dimana $j_i = 0$ atau 1 $(i = 1, \dots, n)$
2. *Condense form*
$$a_1^{x_1}, a_2^{x_2}, \dots, a_n^{x_n} \qquad (2.2)$$
dimana $x_i = 0, 1$ dengan $a_i^0 = 1, a_i^1 = a_i$
3. *x-representation*
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad (2.3)$$
dimana $x_i = 0, 1$

Secara umum, pengaruh utama dan interaksi dapat disimbolkan dengan:
$$A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \dots A_n^{\alpha_n} \qquad (2.4)$$

dimana $\alpha_i = 0, 1$ untuk $i = 1 \dots n$ dan $A_i^0 = 1$ dan $A_i^1 = A_i$. Kata *interaksi* akan digunakan untuk kasus umum, termasuk untuk menggambarkan pengaruh utama yang dianggap sebagai sebuah interaksi dari 1 faktor. Andaikan pada notasi (2.4) semua $\alpha_i = 0$ maka interaksi akan disimbolkan dengan M, yaitu rata-rata dari 2^n perlakuan.

2.1.2 Pengaruh Utama dan Interaksi

Dengan menggunakan notasi (2.2) dan (2.4), interaksi dan pengaruh utama suatu faktor dapat dirumuskan sebagai berikut [5]:

$$A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \dots A_n^{\alpha_n} = \frac{1}{2^{n-1}} \prod_{i=1}^{n} [a_i + (-1)^{\alpha_i}] \qquad (2.5)$$

Sedangkan rata-rata dari 2^n perlakuan dirumuskan dengan:

$$M = \frac{1}{2^n} \prod_{i=1}^{n} [a_i + 1] \qquad (2.6)$$

Dalam percobaan faktorial 2^n, sebanyak 2^{n-1} perlakuan dalam $A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \dots A_n^{\alpha_n}$ bertanda positif dan 2^{n-1} perlakuan lainnya bertanda negatif. Untuk mengetahui tanda dari perlakuan tertentu, menuliskan persamaan (2.5) menjadi persamaan (2.7) di bawah ini akan sangat menbantu.

$$A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \dots A_n^{\alpha_n} = \prod_{i=1}^{n} [a_i^1 + (-1)^{\alpha_i} a_i^0] \qquad (2.7)$$

Dari persamaan (2.7), terlihat bahwa kombinasi perlakuan akan memuat a_i^1 dan a_i^0 untuk $i = 1, 2, \dots, n$. Untuk itu tanda dari $a_1^{x_1}, a_2^{x_2}, \dots, a_n^{x_n}$ ditentukan oleh:

$$\prod_{i=1}^{n} (-1)^{\alpha_i(1-x_i)} = (-1)^{\sum \alpha_i(1-x_i)} = (-1)^{\sum \alpha_i - \sum \alpha_i x_i} \qquad (2.8)$$

2.1.3 *General Interaction* (GI)

Konsep *General Interaction* (GI) akan sangat berguna dalam sistem pembauran. Perhatikan kasus faktorial 2^2 berikut:

		B: b_0	B: b_1
A	a_0	$a_0 b_0$ (1)	$a_0 b_1$ (2)
A	a_1	$a_1 b_0$ (3)	$a_1 b_1$ (4)

Pengaruh utama A, B dan pengaruh interaksi AB, dituliskan dengan simbol berikut:

$$\begin{aligned} A &: (3) + (4) - (1) - (2) \\ B &: (2) + (4) - (1) - (3) \\ AB &: (1) + (4) - (2) - (3) \end{aligned} \qquad (2.9)$$

Untuk kasus 2^n, misalkan X dan Y merupakan interaksi yang didefinisikan sebagai berikut:

$$X = A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \dots A_n^{\alpha_n} \qquad (2.10)$$

dan

$$Y = A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2} \dots A_n^{\beta_n} \qquad (2.11)$$

yang didefiniskan berturut-turut oleh persamaan $\sum_i \alpha_i x_i = 0{,}1$ dan $\sum_i \beta_i x_i = 0{,}1$ yang dihitung dalam modulo 2, atau dapat ditulis dengan:

$$\sum_i \alpha_i x_i = k$$

$$\sum_i \beta_i x_i = l$$

dimana $k, l = 0, 1 \; mod \; 2$. Sembarang pasangan persamaan tersebut akan dipenuhi oleh 2^{n-2} kombinasi taraf atau perlakuan. Selanjutnya 2^n kombinasi taraf atau perlakuan ini akan disusun dalam tabel 2 x 2 berikut ini.

Tabel 2.1 *General Interaction* (GI) *X* dan *Y*

		$\sum \beta_i x_i$: 0	$\sum \beta_i x_i$: 1
$\sum \alpha_i x_i$	0	(1)	(2)
$\sum \alpha_i x_i$	1	(3)	(4)

Sehingga diperoleh tiga persamaan berikut, seperti pada persamaan (2.9).

$$\begin{aligned} X &: (3) + (4) - (1) - (2) \\ Y &: (2) + (4) - (1) - (3) \\ XY &: (1) + (4) - (2) - (3) \end{aligned} \tag{2.12}$$

XY pada persamaan (2.12) disebut sebagai *General Interaction* dari X dan Y. Dari tabel 2.1 di atas, diperoleh empat persamaan berikut yang dihitung dalam modulo 2.

(1): $\sum_i \alpha_i x_i = 0$ dan $\sum_i \beta_i x_i = 0$

Jadi $$\sum_i (\alpha_i + \beta_i) x_i = 0 \tag{2.13}$$

(2): $\sum_i \alpha_i x_i = 0$ dan $\sum_i \beta_i x_i = 1$

Jadi $$\sum_i (\alpha_i + \beta_i) x_i = 1 \tag{2.14}$$

(3): $\sum_i \alpha_i x_i = 1$ dan $\sum_i \beta_i x_i = 0$

Jadi $$\sum_i (\alpha_i + \beta_i) x_i = 1 \tag{2.15}$$

(4): $\sum_i \alpha_i x_i = 1$ dan $\sum_i \beta_i x_i = 1$

Jadi $$\sum_i (\alpha_i + \beta_i) x_i = 0 \tag{2.16}$$

Untuk itu berdasarkan persamaan (2.13) sampai dengan persamaan (2.16), GI XY dapat juga didefinisikan dalam bentuk partisi berikut.

$$\sum_i (\alpha_i + \beta_i) x_i = 0{,}1 \; mod \; 2 \tag{2.17}$$

Jadi GI antara $X = A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \dots A_n^{\alpha_n}$ dan $Y = A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2} \dots A_n^{\beta_n}$, secara formal dapat ditulis

$$XY = A_1^{\alpha_1+\beta_1} A_2^{\alpha_2+\beta_2} \dots A_n^{\alpha_n+\beta_n} \tag{2.18}$$

2.1.4 Model Linier

Percobaan terdiri dari n faktor dengan 2 taraf setiap faktornya, maka model linier dari percobaan faktorial 2^n dapat dituliskan sebagai berikut:

$$y_j(\boldsymbol{x}) = \mu + \beta_j + \tau(\boldsymbol{x}) + e_j(\boldsymbol{x}) \tag{2.19}$$

Dimana, $y_j(\boldsymbol{x})$ adalah pengamatan pada blok ke-j yang memperoleh perlakuan $\boldsymbol{x}$, μ adalah rataan umum β_j adalah pengaruh blok ke-j, $(j = 1 \dots b)$. $\tau(\boldsymbol{x})$ adalah pengaruh perlakuan $\boldsymbol{x}' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(x_l = 0{,}1; l = 1, \dots, n)$ dan $e_j(\boldsymbol{x})$ adalah galat percobaan

Agar inferensia valid, diasumsikan bahwa $e_j(\boldsymbol{x})$ menyebar bebas identik menurut sebaran normal $(0, \sigma_e^2)$. Selain itu, Model yang digunakan di atas adalah model tetap.

2.1.5 Analisis Keragaman

Penghitungan Jumlah Kuadrat Total dan Blok masing-masing dapat dilakukan dengan presamaan berikut

$$JK[T] = \sum_j \sum_{\boldsymbol{x}} y_j^2(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{b2^n} y_{\cdot}^2(.)$$

$$JK[B] = \frac{1}{2^n} \sum_j y_j^2(.) - \frac{1}{b2^n} y_{\cdot}^2(.)$$

sedangkan untuk Jumlah Kuadrat Pengaruh utama atau interaksi dirumuskan sebagai berikut (Montgomery, 2001):

$$JK\left[A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \dots A_n^{\alpha_n}\right] = \frac{1}{b2^n} \left(Contrast_{A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \dots A_n^{\alpha_n}}\right)^2$$

dimana $Contrast\left[A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \dots A_n^{\alpha_n}\right]$ dapat dihitung dengan menggunakan persamaan:

$$Contrast_{A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \dots A_n^{\alpha_n}} = \prod_{i=1}^{n} [a_i + (-1)^{\alpha_i}]$$

2.2 Sistem Pembauran (*Confounding*) Pada Faktorial 2^2

Konsep pembauran (*Confounding*) dapat dipahami dengan mudah melalui contoh yang sederhana seperti pada kasus percobaan faktorial 2^2. Dalam percobaan faktorial 2^2 terdapat dua faktor yang digunakan, misalkan A_1 dan A_2, yang masing-masing memiliki dua taraf, a_{i_0} dan a_{i_1} untuk $i = 1, 2$. Empat kombinasi taraf yang dihasilkan akan ditempatkan ke dalam dua blok yang berbeda dengan alasan blok yang tersedia tidak mampu menampung empat perlakuan yang ada dalam satu blok yang sama, atau mungkin saja blok yang berukuran dua satuan percobaan lebih homogen dibandingkan dengan blok yang berukuran empat satuan percobaan. Misalkan empat perlakuan tersebut dibagi ke dalam 2 blok berikut.

$$blok\ 1 \quad : a_{1_1}a_{2_1}, a_{1_0}a_{2_0}$$
$$blok\ 2 \quad : a_{1_1}a_{2_0}, a_{1_0}a_{2_1}$$

Untuk mengetahui pengaruh mana yang terbaur dengan pengaruh blok, perhatikan kontras-kontras perlakuan berikut.

$$C_{A_1} \quad : a_{1_1}a_{2_1} + a_{1_1}a_{2_0} - a_{1_0}a_{2_1} - a_{1_0}a_{2_0}$$
$$C_{A_2} \quad : a_{1_1}a_{2_1} - a_{1_1}a_{2_0} + a_{1_0}a_{2_1} - a_{1_0}a_{2_0}$$
$$C_{A_1A_2} \quad : a_{1_1}a_{2_1} - a_{1_1}a_{2_0} - a_{1_0}a_{2_1} + a_{1_0}a_{2_0}$$

Dari kontras-kontras ini terlihat bahwa kontras yang menghitung pengaruh utama A_1 dan A_2 bebas dari blok, tetapi tidak demikian untuk kontras yang menghitung pengaruh interaksi A_1A_2. Andaikan total dari $blok\ 1$ adalah B_1 dan total dari $blok\ 2$ adalah B_2, maka kontras yang menghitung pengaruh interaksi A_1A_2 dapat ditulis sebagai berikut:

$$C_{A_1A_2} : B_1 - B_2$$

yang menunjukkan bahwa pengaruh interaksi A_1A_2 terbaur dengan dua blok tak lengkap, atau singkatnya A_1A_2 terbaur dengan blok. Susunan lain yang dapat digunakan untuk menempatkan empat perlakuan yang ada adalah sebagai berikut.

Susunan I	
$blok\ 1$	$a_{1_1}a_{2_1}, a_{1_1}a_{2_0}$
$blok\ 2$	$a_{1_0}a_{2_1}, a_{1_0}a_{2_0}$

Susunan II	
$blok\ 1$	$a_{1_1}a_{2_1}, a_{1_0}a_{2_1}$
$blok\ 2$	$a_{1_1}a_{2_0}, a_{1_0}a_{2_0}$

Pengaruh utama A_1 dan A_2 akan terbaur dengan blok, masing-masing pada Susunan I dan Susunan II.

2.3 Sistem Pembauran (*Confounding*) Pada Faktorial 2^n

Permasalahan yang dapat terjadi di lapangan salah satunya adalah tidak tersedianya jumlah blok yang homogen dengan cukup. Namun demikian, percobaan yang dilakukan harus dapat menjawab pertanyaan yang ada. Dengan adanya jumlah blok yang lebih kecil dari pada jumlah perlakuan, memaksa penggunaan blok yang tak lengkap untuk dilakukan.

Konsekuensi yang harus diterima dengan adanya blok yang tak lengkap adalah terdapat informasi mengenai pengaruh utama atau pengaruh interaksi yang dikorbankan. Informasi tersebut digunakan sebagai dasar untuk memperoleh pengelompokan perlakuan dalam blok-blok yang ada. Karena itu, pengaruh dari faktor tertentu atau pengaruh interaksi tidak dapat diperoleh karena terbaur dengan pengaruh pemblokan. Menurut [**3**], Pembauran (*Confounding*) dari dua atau lebih efek berarti bahwa informasi atau data mengenai efek-efek tersebut tidak dapat diestimasi secara terpisah. Pengaruh perlakuan dikatakan terbaur dengan pengaruh blok jika *alias*-nya adalah sebuah pengaruh blok [**2**]. *Alias* adalah pengaruh lain yang ikut terestimasi ketika sebuah pengaruh diestimasi [**1**].

Beberapa alasan digunakannya blok/kelompok tak lengkap adalah sebagai berikut [**10**]:

1. Jumlah perlakuan yang besar sehingga tidak dapat dibuat kelompok/blok yang dapat digunakan untuk menampung keseluruhan perlakuan.
2. Ketidakmampuan mengusahakan atau menangani secara efektif blok lengkap.
3. Kelompok/blok tak lengkap muncul secara alamiah.
4. Terjadi hal-hal yang tak diinginkan sebelumnya pada saat pengamatan.

2.2.1 *Percobaan Faktorial 2^n dalam blok berukuran 2^{n-1}*

Karena blok berukuran 2^{n-1}, artinya hanya terdapat 2 blok yang dapat dibentuk untuk itu derajat bebas blok adalah 1. Artinya terdapat interaksi atau pengaruh utama dengan derajat bebas 1 yang harus terbaur dengan blok. Susunan di dalam 2 blok yang berbeda akan diperoleh dengan menentukan himpunan-himpunan kombinasi perlakuan yang masing-masing memenuhi:

$$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \cdots + \alpha_nx_n = 0\ mod\ 2$$
$$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \cdots + \alpha_nx_n = 1\ mod\ 2$$

2.2.2 *Percobaan Faktorial 2^n dalam blok berukuran 2^{n-2}*

Dalam kasus tertentu, mungkin saja blok berukuran 2^{n-1} masih terlalu besar, untuk itu dapat digunakan alternatif berikutnya, yaitu menggunakan blok dengan ukuran 2^{n-2}. Sehingga akan terdapat 4 blok untuk menempatkan 2^n kombinasi perlakuan. Karena blok memiliki 3 derajat bebas, sehingga harus terdapat interaksi atau pengaruh utama dengan total 3 derajat bebas yang terbaur dengan blok. Misalkan $A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \ldots A_n^{\alpha_n}$ akan dibaurkan dengan blok, untuk itu diperoleh persamaan di bawah ini yang membagi 2^n perlakuan menjadi dua himpunan yang masing-masing terdiri dari 2^{n-1} perlakuan.

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \, mod\, 2 \qquad (2.20)$$
$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 1 \, mod\, 2 \qquad (2.21)$$

Selanjutnya masing-masing himpunan tersebut, akan dibagi lagi menjadi dua bagian yang masing-masing memuat 2^{n-2} perlakuan. Pembagian ini dilakukan dengan menggunakan Interaksi atau Pengaruh Utama lainnya yang akan dibaurkan dengan pengaruh blok, sebut saja $A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2} \ldots A_n^{\beta_n}$ yang berhubungan dengan 2 persamaan berikut

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n = 0 \, mod\, 2 \qquad (2.22)$$
$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n = 1 \, mod\, 2 \qquad (2.23)$$

Jadi empat persamaan $(2.20) - (2.23)$ yang ada ini akan menentukan susunan masing-masing dari 4 blok. Berdasarkan persamaan (2.18) perlakuan lainnya yang juga akan terbaur dengan blok adalah

$$\left(A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \ldots A_n^{\alpha_n}\right)\left(A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2} \ldots A_n^{\beta_n}\right) = A_1^{\alpha_1+\beta_1} A_2^{\alpha_2+\beta_2} \ldots A_n^{\alpha_n+\beta_n} \qquad (2.24)$$

2.2.3 *Percobaan Faktorial 2^n dalam Blok Berukuran 2^p*

Misalkan akan di bentuk blok dengan ukuran $k = 2^p$, maka untuk menempatkan 2^n perlakuan diperlukan sebanyak 2^{n-p} blok dan sebanyak $2^{n-p} - 1$ pengaruh utama atau interaksi akan terbaur dengan blok. Dengan hanya memilih sebanyak $n - p$ pengaruh utama atau interaksi, sebanyak $2^{n-p} - 1 - (n - p)$ pengaruh utama atau interaksi lainnya yang terbaur dengan blok dapat diketahui. Misalkan dipilih $n - p$ interaksi $E^{\boldsymbol{\alpha}_s} = A^{\alpha_{s1}} A^{\alpha_{s2}} \ldots A^{\alpha_{sn}}$, dimana $\boldsymbol{\alpha}'_s = (\alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \ldots \alpha_{sn})$ dan $s = 1 \ldots n - p$, yang disebut sebagai interaksi yang saling bebas, yang akan menentukan susunan kombinasi perlakuan masing-masing blok berdasarkan persamaan berikut

$$\begin{gathered}\alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \cdots + \alpha_{1n} x_n = \delta_1 \\ \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \cdots + \alpha_{2n} x_n = \delta_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-p,1} x_1 + \alpha_{n-p,2} x_2 + \cdots + \alpha_{n-p,n} x_n = \delta_{n-p}\end{gathered} \qquad (2.25)$$

dengan $\delta_s = 0{,}1 \, mod\, 2$

2.2.4 *Model Linier*

Percobaan terdiri dari n faktor dengan 2 taraf setiap faktornya dan ukuran blok yang tersedia adalah 2^p. Jika susunan blok diulang r kali, maka model linier dari percobaan faktorial 2^n dengan beberapa pengaruh interaksinya dibaurkan dapat dituliskan sebagai berikut [**5**]:

$$y_{ij}(\boldsymbol{x}) = \mu + \beta_{ij} + \tau(\boldsymbol{x}) + e_{ij}(\boldsymbol{x}) \qquad (2.26)$$

atau secara lebih spesifik dapat ditulis sebagai berikut:

$$y_{ij}(\boldsymbol{x}) = \mu + \rho_i + \beta_{ij}^* + \tau(\boldsymbol{x}) + e_{ij}(\boldsymbol{x}) \qquad (2.27)$$

Dimana, $y_{ij}(\boldsymbol{x})$ adalah pengamatan pada blok ke-*j* dan ulangan ke-i yang memperoleh perlakuan $\boldsymbol{x}$, μ adalah rataan umum, ρ_i adalah pengaruh ulangan ke-i, $(i = 1 \ldots r)$, β_{ij}, β_{ij}^* adalah pengaruh blok ke-*j* pada ulangan ke-i, $(i = 1 \ldots 2^{n-p})$, $\tau(\boldsymbol{x})$ adalah pengaruh perlakuan $\boldsymbol{x}' = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(x_l = 0{,}1; l = 1, \ldots, n)$, $e_{ij}(\boldsymbol{x})$ adalah galat percobaan

Agar inferensia valid, diasumsikan bahwa $e_{ij}(\boldsymbol{x})$ menyebar bebas identik menurut sebaran normal $(0, \sigma_e^2)$. Selain itu, Model yang digunakan di atas adalah model tetap. Model (2.26) di atas juga dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\boldsymbol{y} = \mu \boldsymbol{\mathcal{I}} + \boldsymbol{X}_\rho \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{X}_{\beta^*} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{X}_\tau \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{e} \qquad (2.28)$$

$\boldsymbol{y}$ adalah vektor kolom yang berisi nilai respon/pengamatan, $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ adalah vektor kolom yang berisi sebanyak $r2^n$ elemen unit (1), $\boldsymbol{X}_\rho$ adalah matriks pengaruh ulangan, $\boldsymbol{X}_{\beta^*}$ adalah matrik pengaruh blok, $\boldsymbol{X}_\tau$ adalah matriks pengaruh perlakuan, dan $\boldsymbol{e}$ adalah vektor kolom yang memuat galat percobaan.

$$\boldsymbol{X}_\rho = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{k_1}} & & & \\ & \boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{k_2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{k_r}} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{k_i}}$ $(i = 1,2,\dots,r)$ adalah vector kolom yang berisi 2^n elemen unit

$$\boldsymbol{X}_{\beta^*} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{k_1}} & & & \\ & \boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{k_2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{k_{r2^{n-p}}}} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{k_j}}$ $(j = 1,2,\dots,r2^{n-p})$ adalah vector kolom yang berisi 2^p elemen unit.

$$\boldsymbol{X}_\tau = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v}_{2^n})$$

$\mathbf{v_s}$ vektor kolom yang memuat r elemen unit, dan $(r2^n - r)$ elemen nol, sedemikian sehingga $\mathbf{v_s'v_s} = r$ dan $\mathbf{v_s'v_{s'}} = 0$ untuk $s \neq s'\left(s, s' = 1, 2, \dots, 2^n\right)$.

2.2.5 Analisis Keragaman

Untuk menyederhanakan notasi, sejumlah interaksi atau pengaruh utama akan dibagi menjadi dua bagian, yaitu $\mathcal{E}_1$ dan $\mathcal{E}_2$. Bagian pertama $\mathcal{E}_1 = \{E^{\alpha_l}, l = 1,2,\dots,q(= 2^{n-p} - 1)\}$ adalah himpunan interaksi yang terbaur dengan blok, sedangkan bagian kedua $\mathcal{E}_2 = \{E^{\gamma_m}, m = 1,2,\dots,s(= 2^{n-p}(2^p - 1))\}$ adalah himpunan interaksi yang tak terbaur dengan blok. Analisis keragaman percobaan faktorial 2^n dalam blok berukuran 2^p dapat dituliskan dalam tabel berikut [**5**]

Tabel Analisis Keragaman Percobaan Faktorial 2^n dalam Blok Berukuran 2^p

Sumber	Derajat bebas	Jumlah Kuadrat
Anava Dasar		
$\boldsymbol{X}_\beta \mid \boldsymbol{\mathcal{I}}$	$r2^{n-p} - 1$	$\frac{1}{2^p}\sum_{ij} y_{ij}^2(.) - \frac{1}{r2^n} y_{..}^2(.)$
$\boldsymbol{X}_\tau \mid \boldsymbol{\mathcal{I}}, \boldsymbol{X}_\beta$	$2^{n-p}(2^p - 1)$	$r2^{n-2}\sum_m \left[\hat{E}^{\gamma_m}\right]^2$
$\boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{\mathcal{I}}, \boldsymbol{X}_\beta, \boldsymbol{X}_\tau$	$(r-1)2^{n-p}(2^p - 1)$	Subtraction
Total	$r2^n - 1$	$\sum_{ij}\sum_{x} y_{ij}^2(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{r2^n} y_{..}^2(.)$
Anava Lengkap		
$\boldsymbol{X}_\beta \mid \boldsymbol{\mathcal{I}}$	$r2^{n-p} - 1$	$\frac{1}{2^p}\sum_i\sum_j y_{ij}^2(.) - \frac{1}{r2^n} y_{..}^2(.)$
$\boldsymbol{X}_\rho \mid \boldsymbol{\mathcal{I}}$	$r - 1$	$\frac{1}{2^n}\sum_i y_{i.}^2(.) - \frac{1}{r2^n} y_{..}^2(.)$
$\boldsymbol{X}_{\beta^*} \mid \boldsymbol{\mathcal{I}}, \boldsymbol{X}_\rho$	$r(2^{n-p} - 1) = rq$	$\frac{1}{2^p}\sum_i\sum_j y_{ij}^2(.) - \frac{1}{2^n}\sum_i y_{i.}^2(.)$
E^{α_1}	1	$r2^{n-2}[\tilde{E}^{\alpha_1}]^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
E^{α_q}	1	$r2^{n-2}[\tilde{E}^{\alpha_q}]^2$
Remainder	$(r-1)(2^{n-p} - 1) = (r-1)q$	Subtraction
$\boldsymbol{X}_\tau \mid \boldsymbol{\mathcal{I}}, \boldsymbol{X}_\beta$	$2^{n-p}(2^p - 1) = s$	
E^{γ_1}	1	$r2^{n-2}\left[\hat{E}^{\gamma_1}\right]^2$
E^{γ_2}	1	$r2^{n-2}\left[\hat{E}^{\gamma_2}\right]^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
E^{γ_s}	1	$r2^{n-2}\left[\hat{E}^{\gamma_n}\right]^2$
$\boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{\mathcal{I}}, \boldsymbol{X}_\beta, \boldsymbol{X}_\tau$	$(r-1)2^{n-p}(2^p - 1) = (r-1)s$	Subtraction
Total	$r2^n - 1$	$\sum_i\sum_j\sum_x y_{ij}^2(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{r2^n} y_{..}^2(.)$

2.3. Sistem Pembauran Pada Percobaan Faktorial 3^n

2.3.1 Percobaan Faktorial Tiga Taraf

Terdapat sedikit perbedaan antara percobaan faktorial dua taraf dengan percobaan faktorial tiga taraf. Perbedaan itu adalah pembagian respon ke dalam respon linier dan respon kuadratik pada percobaan faktorial tiga taraf, sedangkan pada percobaan faktorial dua taraf hanya berupa respon linier saja.

2.3.2 Percobaan Faktorial 3^2

Misalkan faktor yang terlibat dalam percobaan faktorial 3^2 adalah A dengan a_0, a_1, a_2 adalah tarafnya dan faktor B dengan taraf b_0, b_1, b_2. Pengaruh dari Faktor A dan faktor B masing-masing dapat dibagi menjadi respon linier dan respon kuadratik.

$$A_L : -1a_0 + 0a_1 + 1a_2$$
$$A_Q : +1a_0 - 2a_1 + 1a_2$$

atau dengan pernyataan kombinasi perlakuan sebagai berikut (pembagi diabaikan):

$$\begin{aligned} A_L &= \{(a_2b_0 - a_0b_0) + (a_2b_1 - a_0b_1) + (a_2b_2 - a_0b_2)\} \\ &= (a_2 - a_0)(b_0 + b_1 + b_2) \\ A_Q &= (a_2 - 2a_1 + a_0)(b_0 + b_1 + b_2) \end{aligned}$$

Untuk pengaruh B dapat ditulis:

$$\begin{aligned} B_L &= (b_2 - b_0)(a_0 + a_1 + a_2) \\ B_Q &= (b_2 - 2b_1 + b_0)(a_0 + a_1 + a_2) \end{aligned}$$

Dan untuk AB ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} A_LB_L &= (a_2 - a_0)\,(b_2 - b_0) \\ A_QB_L &= (a_2 - 2a_1 + a_0)\,(b_2 - b_0) \\ A_LB_Q &= (a_2 - a_0)\,(b_2 - 2b_1 + b_0) \\ A_QB_Q &= (a_2 - 2a_1 + a_0)\,(b_2 - 2b_1 + b_0) \end{aligned}$$

2.3.3 Percobaan Faktorial 3^n

Suatu percobaan terdiri dari n faktor, yaitu $A_1, A_2, \dots, A_n$ dimana setiap faktor memiliki tiga taraf, yaitu a_{i_0}, a_{i_1} dan a_{i_2} untuk $i = 1, 2, \dots, n$. Jumlah perlakuan yang akan dihasilkan dengan menggunakan n faktor tersebut adalah sebanyak 3^n. Pengaruh utama dan interaksi yang dihasilkan adalah sebanyak $(3^n - 1)/2$ yang masing-masing memiliki 2 derajat bebas. Notasi yang akan digunakan untuk menggambarkan sebuah interaksi sama seperti notasi yang dipakai sebelumnya, yaitu:

$$A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \dots A_n^{\alpha_n}$$

dimana $\alpha_i = 0, 1, 2$ untuk $i = 1 \dots n$, $A_i^0 = 0$, $A_i^0 = A_i$ dan $A_i^2 = A_i^2$. Untuk $\boldsymbol{\alpha}' = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ yang berhubungan dengan $A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \dots A_n^{\alpha_n}$, dapat dikatakan sebagai pembagian (partisi) dari sebanyak 3^n kombinasi perlakuan ke dalam 3 himpunan yang sama banyak berdasarkan persamaan berikut:

$$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \dots + \alpha_nx_n = 0,1,2 \; mod\; 3$$

Dalam menuliskan sebuah interaksi, untuk α pertama yang tidak nol adalah bernilai 1. Jika tidak bernilai 1, maka angka 1 dapat diperoleh dengan mengalikan semua α_i dengan angka 2. Hal ini dapat dilakukan karena kedua pengaruh utama atau interaksi yang dihasilkan indentik. Penjelasannya adalah, $\boldsymbol{\alpha}' = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ akan berhubungan dengan persamaan berikut:

$$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \dots + \alpha_nx_n = 0,1,2 \; mod\; 3$$

Jika ruas kanan dan ruas kiri dikalikan dengan 2, maka persamaan yang diperoleh adalah persamaan yang identik dengan persamaan di atas. Persamaan tersebut adalah:

$$2\alpha_1x_1 + 2\alpha_2x_2 + \dots + 2\alpha_nx_n = 0,2,1 \; mod\; 3$$

atau dapat ditulis

$$2\alpha_1x_1 + 2\alpha_2x_2 + \dots + 2\alpha_nx_n = 0,1,2 \; mod\; 3$$

yang menggambarkan pengaruh utama atau interaksi $A_1^{2\alpha_1} A_2^{2\alpha_2} \dots A_n^{2\alpha_n}$. Jadi disimpulkan bahwa interaksi atau pengaruh utama $A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \dots A_n^{\alpha_n}$ identik dengan $A_1^{2\alpha_1} A_2^{2\alpha_2} \dots A_n^{2\alpha_n}$.

Penjelasan di atas juga menjelaskan mengapa hanya terdapat $(3^n - 1)/2$ interaksi dan pengaruh utama saja dan masing-masing memiliki dua derajat bebas.

Untuk percobaan faktorial dengan menggunakan tiga taraf, Pengaruh dari suatu Faktor A_i, $i = 1..n$, masing-masing dapat dibagi menjadi respon linier dan kuadratik yang kontrasnya dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} L &: -1a_{i_0} + 0a_{i_1} + 1a_{i_2} \\ Q &: +1a_{i_0} - 2a_{i_1} + 1a_{i_2} \end{aligned} \qquad (3.1)$$

Jadi kontras pengaruh utama dan interaksi, dapat ditulis sebagai berikut:

$$Contrast\left(A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \dots A_n^{\alpha_n}\right) = \prod_{i=1}^{n} C\left(A_i^{\alpha_i}\right) \qquad (3.2)$$

Dimana

$$C(A_i^{\alpha_i}) = \begin{cases} (+1a_{i_0} + 1a_{i_2} + 1a_{i_2}), & \alpha_i = 0 \bmod 3 \\ (-1a_{i_0} + 0a_{i_2} + 1a_{i_2}), & \alpha_i = 1 \bmod 3 \\ (+1a_{i_0} - 2a_{i_2} + 1a_{i_2}), & \alpha_i = 2 \bmod 3 \end{cases}$$

2.3.4 Pembauran pada percobaan faktorial Tiga Taraf

Penggunaan sistem pembauran (C*ounfounding*) pada percobaan faktorial tiga taraf akan lebih beralasan dibandingkan pada percobaan faktorial dua taraf. Hal ini demikian karena dalam percobaan faktorial tiga taraf jumlah perlakuan yang dihasilkan akan selalu lebih besar untuk setiap n faktor yang digunakan. Bahkan untuk n yang kecilpun, percobaan faktorial tiga taraf akan menghasilkan perlakuan yang besar. Konsep sistem pembauran pada percobaan faktorial tiga taraf sama seperti dengan konsep pembauran pada percobaan faktorial dua taraf.

Salah satu keuntungan dari penggunaan sistem pembauran (*Confounding*) adalah tereduksinya galat percobaan [**6**], sehingga error akan semakin kecil. Semakin kecilnya error atau galat percobaan ini merupakan akibat dari pembagian perlakuan ke dalam blok-blok tak lengkap yang homogen. *Confounding* akan mereduksi pengaruh keheterogenan dengan mereduksi ukuran blok [**7**]. Dengan semakin kecil satuan percobaan dalam suatu blok, maka akan membuat keragaman dalam blok tersebut juga semakin kecil. Dengan demikian error atau galat percobaan yang disumbangkan oleh pemblokan juga akan semakin kecil.

2.3.5 Pembauran pada percobaan faktorial 3^2

Dengan menggunakan dua faktor, jumlah perlakuan yang akan dihasilkan adalah sebanyak 9 perlakuan. Andaikan ukuran dari blok yang homogen tidak cukup untuk menampung 9 perlakuan tersebut, maka blok dengan ukuran 3 satuan percobaan akan digunakan. Jadi diperlukan 3 blok untuk menempatkan seluruh perlakuan yang ada dalam satu kali ulangan. Misalkan pengaruh A_{1_L} akan dikorbankan, maka Ppngelompokan yang diperoleh dengan mengorbankan A_{1_L} adalah sebagai berikut:

Tabel Pemblokan pada faktorial $\mathbf{3^2}$ berdasarkan $\boldsymbol{A_{1_L}}$

Blok 1 $(-)$	Blok 2 (0)	Blok 3 $(+)$
$a_{1_0}a_{2_0}$	$a_{1_1}a_{2_0}$	$a_{1_2}a_{2_0}$
$a_{1_0}a_{2_1}$	$a_{1_1}a_{2_1}$	$a_{1_2}a_{2_1}$
$a_{1_0}a_{2_2}$	$a_{1_1}a_{2_2}$	$a_{1_2}a_{2_2}$

Walaupun pengaruh yang dikorbankan adalah A_{1_L}, tetapi pengaruh A_{1_Q} juga ikut terkorbankan. Hal ini dapat dijelaskan melalui kontras dari A_{1_Q} sebagai berikut:

$$a_{1_0}a_{2_0} - 2a_{1_1}a_{2_0} + a_{1_2}a_{2_0} + a_{1_0}a_{2_1} - 2a_{1_1}a_{2_1} + a_{1_2}a_{2_1} + a_{1_0}a_{2_2} - 2a_{1_1}a_{2_2} + a_{1_2}a_{2_2}$$

Andaikan total dari masing-masing blok adalah B_1, B_2, dan B_3. Dengan menyusun ulang maka kontras dari A_{1_Q} dapat ditulis sebagai berikut:

$$A_{1_Q}: B_1 - 2B_2 + B_3$$

Persamaan terakhir ini menunjukkan bahwa pengaruh dari A_{1_Q} juga terbaur dengan pengaruh blok. Hal ini tidak mengherankan karena masing-masing derajat bebas dari A_{1_L} dan A_{1_Q} adalah 1 derajat bebas, sehingga totalnya adalah 2 derajat bebas yang memang diperlukan untuk membentuk 3 blok.

2.3.5 Pembauran pada percobaan faktorial 3^n

Andaikan jumlah blok yang tersedia tidak cukup untuk menampung 3^n perlakuan yang ada. Blok yang tersedia tersebut hanya cukup menampung 3^pperlakuan saja, $1 < p < n$. Untuk itu blok yang akan diperlukan adalah sebanyak $(3^n/3^p) = 3^{n-p}$, jadi total derajat bebas perlakuan yang harus terbaur dengan blok adalah $3^{n-p} - 1$. Karena setiap pengaruh utama atau interaksi dibentuk ke dalam 2 derajat bebas, maka banyaknya pengaruh utama dan interaksi yang terbaur dengan blok adalah sebanyak $(3^{n-p} - 1)/2$. Dan untuk pengaruh utama atau interaksi yang tak terbaur dengan blok adalah sebanyak $(3^{n-p}(3^p-1)/2)$.

Untuk mengetahui $(3^{n-p}-1)/2$ pengaruh utama dan interaksi yang terbaur dengan blok, cukup dengan memilih $h=n-p$ interaksi atau pengaruh utama yang saling bebas, karena *General Interaction* (GI) dari h pengaruh utama atau interaksi adalah sebanyak:

$$2\binom{h}{2}+2^2\binom{h}{3}+2^3\binom{h}{4}+\cdots+2^{h-1}\binom{h}{h}=\frac{1}{2}3^h-\frac{1}{2}-h \quad (3.3)$$

Setelah h interaksi atau pengaruh utama yang terbaur dengan blok ditentukan, selanjutnya adalah menentukan pemblokan, yaitu menempatkan perlakuan-perlakuan yang ada ke dalam blok-blok dengan ukuran yang tersedia dengan memanfaatkan persamaan yang berhubungan dengan interaksi atau pengaruh utama yang terbaur dengan blok. Persamaan-persamaan yang dimaksud adalah:

$$\begin{gathered}\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\cdots+\alpha_{1n}x_n=\delta_1\\ \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\cdots+\alpha_{2n}x_n=\delta_2\\ \vdots\\ \alpha_{h,1}x_1+\alpha_{h,2}x_2+\cdots+\alpha_{h,n}x_n=\delta_h\end{gathered}$$

dimana $\delta_t=0,1,2\ mod\ 3$ untuk $t=1,2,\dots,h$. Persamaan-persamaan tersebut akan membagi 3^n perlakuan ke dalam 3^h blok sama banyak.

2.3.6 Model Linier

Percobaan terdiri dari n faktor dengan 3 taraf setiap faktornya, kemudian ukuran blok yang tersedia adalah 3^p dan susunan blok diulang r kali. Model yang dipakai sama seperti model yang digunakan sebelumnya, yaitu:

$$y_{ij}(\boldsymbol{x})=\mu+\beta_{ij}+\tau(\boldsymbol{x})+e_{ij}(\boldsymbol{x}) \quad (3.4)$$

atau secara lebih spesifik dapat ditulis sebagai berikut:

$$y_{ij}(\boldsymbol{x})=\mu+\rho_i+\beta^*_{ij}+\tau(\boldsymbol{x})+e_{ij}(\boldsymbol{x}) \quad (3.5)$$

Agar inferensia valid, diasumsikan bahwa $e_{ij}(\boldsymbol{x})$ menyebar bebas identik menurut sebaran normal $(0,\sigma_e^2)$. Selain itu, Model yang digunakan di atas adalah model tetap. Model (2.26) di atas juga dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\boldsymbol{y}=\mu\boldsymbol{\mathcal{J}}+\boldsymbol{X}_\rho\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{X}_{\beta^*}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{X}_\tau\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{e} \quad (3.6)$$

2.3 Analisis Keragaman

Untuk menyederhanakan notasi, sejumlah interaksi atau pengaruh utama akan dibagi menjadi dua bagian, yaitu $\mathcal{E}_1$ dan $\mathcal{E}_2$. Bagian pertama $\mathcal{E}_1=\{E^{\alpha_l},l=1,2,\dots,q(=(3^{n-p}-1)/2)\}$ adalah himpunan interaksi yang terbaur dengan blok, sedangkan bagian kedua $\mathcal{E}_2=\{E^{\gamma_m},m=1,2,\dots,s(=3^{n-p}(3^p-1)/2)\}$ adalah himpunan interaksi yang tak terbaur dengan blok.

Perlakuan yang dihasilkan dalam percobaan faktorial dengan menggunakan tiga taraf adalah sebanyak 3^n yang semuanya akan ditempatkan dalam sebuah susunan blok. Jika susunan blok yang dimaksud ini diulang sebanyak r kali maka total pengamatan yang akan dihasilkan adalah sebanyak $r3^n$, sehingga derajat bebas total adalah $r3^n-1$. Keseluruhan derajat bebas ini dapat dibagi ke dalam derajat bebas blok, derajat bebas perlakuan, dan juga derajat bebas galat.

Dalam satu kali ulangan, terdapat 3^{n-p} blok dengan derajat bebas $3^{n-p}-1$. Sehingga dengan mengulang susunan blok sebanyak r kali yang masing-masing memiliki jumlah blok sebanyak 3^{n-p}, maka total blok yang digunakan adalah $r3^{n-p}$ blok. Untuk itu, derajat bebas untuk blok adalah $r3^{n-p}-1$.

Untuk percobaan faktorial dengan menggunakan tiga taraf, perlakuan yang akan dihasilkan adalah sebanyak 3^n. Untuk itu derajat bebas perlakuan yang dihasilkan dari n faktor yang masing-masing menggunakan tiga taraf adalah $3^n - 1$. Tetapi dalam hal ini, *Confounding*, terdapat sejumlah pengaruh utama atau interaksi yang terbaur dengan blok sehingga pengaruhnya tidak dapat diestimasi. Untuk itu, derajat bebas perlakuan yang digunakan adalah total derajat bebas pengaruh utama atau interaksi yang tak terbaur dengan blok. Telah disebutkan dalam penjelasan sebelumnya bahwa terdapat $\left(3^{n-p}(3^p - 1)\right)/2$ pengaruh utama dan interaksi yang tak terbaur dengan blok yang masing-masing memiliki 2 derajat bebas, jadi derajat bebas perlakuan yang digunakan adalah $3^{n-p}(3^p - 1)$. Sedangkan derajat bebas galat adalah sebagai berikut,

$$db(Galat) \quad = (r-1)3^{n-p}(3^p - 1) \qquad (3.7)$$

Selanjutnya, untuk keperluan analisis varian juga diperlukan Jumlah Kuadarat. Jumlah Kuadrat (JK) yang akan dicari adalah Jumlah Kuadrat Total, yang dapat dibagi menjadi Jumlah $JK(Blok)$, $JK(Perlakuan)$, dan $JK(Galat)$. Masing-masing Jumlah Kuadarat tersebut dapat diperoleh sebagai berikut

- $JK(Total)$

  Jumlah kuadrat total dihitung berdasarkan rumus berikut

$$JK(Total) = \sum_{ijx} y_{ij}^2(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{r3^n} y_{..}^2(.) \qquad (3.8)$$

- $JK(Blok)$

  Jumlah kuadrat Blok, dihitung sebagai berikut:

$$JK\left(\boldsymbol{X}_\beta | \boldsymbol{\mathcal{J}}\right) = \frac{1}{3^p} \sum_{ij} y_{ij}^2(.) - \frac{1}{r3^n} y_{..}^2(.) \qquad (3.9)$$

  Jumlah Kuadrat blok dapat dibagi menjadi Jumlah Kuadrat ulangan dan jumlah Kuadrat blok dalam ulangan

$$JK\left(\boldsymbol{X}_\beta | \boldsymbol{\mathcal{J}}\right) \quad = JK(\boldsymbol{X}_\rho | \boldsymbol{\mathcal{J}}) + JK(\boldsymbol{X}_{\beta^*} | \boldsymbol{\mathcal{J}}, \boldsymbol{X}_\rho)$$

  Jumlah Kuadrat blok dalam ulangan dapat dibagi menjadi jumlah kuadrat perlakuan yang terbaur dengan blok dan jumlah kuadrat *Remainder*

$$JK\left(\boldsymbol{X}_{\beta^*} | \boldsymbol{\mathcal{J}}, \boldsymbol{X}_\rho\right) = \sum_{l=1}^{q} JK(E^{\alpha_l}) + JK(Remainder)$$

  Untuk Jumlah Kuadrat Ulangan dihitung sebagai berikut:

$$JK(\boldsymbol{X}_\rho | \boldsymbol{\mathcal{J}}) = \frac{1}{3^n} \sum_i y_{i.}^2(.) - \frac{1}{r3^n} y_{..}^2(.) \qquad (3.10)$$

- $JK(Perlakuan)$

  Jumlah kuadrat pengaruh perlakuan dihitung berdasarkan jumlah kuadrat pengaruh utama dan interaksi. Untuk memperoleh Jumlah Kuadrat dari suatu pengaruh utama atau interaksi, $E^{\boldsymbol{\alpha}} = A^{\alpha_1} A^{\alpha_2} \dots A^{\alpha_n}$, definisikan $E_k^{\boldsymbol{\alpha}}$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E_k^{\boldsymbol{\alpha}} &= \left(A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \dots A_n^{\alpha_n}\right)_k \\ &= \begin{pmatrix} Rata-rata\ kombinasi\ perlakuan \\ yang\ memenuhi\ \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{x} = k\ mod\ 3 \end{pmatrix} - M \end{aligned} \qquad (3.11)$$

  Jumlah kuadrat suatu pengaruh utama atau interaksi yang dihitung 2 derajat bebas, dapat diperoleh dengan rumus sebagai berikut [**5**] :

$$r3^{n-1} \sum_{k=0}^{2} \left[\hat{E}_k^{\gamma_1}\right]^2 \qquad (3.12)$$

  Sehingga jumlah kuadrat seluruh perlakuan adalah

$$r3^{n-1} \sum_{m=1}^{q} \sum_{k=0}^{2} \left[\hat{E}_k^{\gamma_1}\right]^2 \qquad (3.13)$$

  Jumlah kuadrat tersebut merupakan jumlah dari jumlah kuadrat masing-masing q-pengaruh utama atau interaksi yang tak terbaur dengan blok.

- $JK(Galat)$

  Jumlah Kuadarat Galat dapat diperoleh dengan mengurangkan, Jumlah Kuadarat total dengan Jumlah Kuadarat Blok dan Jumlah Kuadarat Perlakuan.

$$\begin{aligned} JK(Galat) = JK(total) &- JK(blok) \\ &- JK(Perlakuan) \end{aligned}$$

Hipotesis

Hipotesis yang dapat diuji adalah ada atau tidak ada pengaruh yang diberikan oleh pengaruh utama atau interaksi terhadap nilai respon/pengamatan. Secara singkat Hipotesis nol dapat ditulis sebagai berikut:

$$H_0 : E^{\alpha_m} = 0$$

Statistik uji yang digunakan untuk menguji hipotesis di atas adalah:

$$F = \frac{KT(E^{\alpha_m})}{KT(\boldsymbol{I}|\boldsymbol{\mathfrak{J}}, \boldsymbol{X}_\beta, \boldsymbol{X}_\tau)}$$

Dengan Kriteria penolakan, tolak H_0 jika nilai p yang diperoleh labih kecil dari taraf (α) yang digunakan yang berarti pengaruh utama atau interaksi tidak memberikan pengaruh yang signifikan terhadap nilai respon/pengamatan.

3. Kesimpulan

Pada percobaan faktorial 3 taraf, perlakuan yang dihasilkan cukup besar bahkan untuk jumlah faktor yang sedikit. Besarnya perlakuan yang dihasilkan ini terkadang menyulitkan peneliti untuk memperoleh blok lengkap yang homogen, sehingga diperlukan beberapa blok tak lengkap untuk menempatkan seluruh perlakuan yang ada.

Penggunaan blok tak lengkap mengakibatkan sebagian perlakuan berada dalam blok yang sama dan sebagian lainnya berada dalam blok yang berbeda, sehingga akan ada pengaruh utama faktor atau interaksi yang terbaur dengan pengaruh blok. Jika ukuran blok yang tersedia adalah 3^p, maka akan ada sebanyak $(3^{n-p} - 1)/2$ Pengaruh utama faktor atau interaksi, masing-masing dihitung 2 derajat bebas, yang terbaur dengan pengaruh blok. Penempatan perlakuaan ke dalam blok-blok tak lengkap dilakukan berdasarkan $n - p$ pengaruh utama faktor atau interaksi yang saling bebas yang terbaur dengan pengaruh blok.

Daftar Pustaka

[1] Anonim. 2010. ***Glossary of experimental design***. http://en.wikipedia.org/wiki/Glossary_of_experimental_design. 12 Desember 2010.

[2] Bailey, R. A., F. H. L. Gilchrist & H. D. Patterson. 1977. ***Identification of effects and confounding patterns in factorial designs***. Biometrika 64: 347-354.

[3] Dunn, O.J. and V.A. Clark. 1974. ***Applied Statistics: Analysis of Variance and Regression***. John Wiley and Sons, Inc. New York.

[4] Hanafiah, K.A. 1991. ***Rancangan Percobaan teori dan aplikasi edisi ketiga***. Raja Grafindo Persada. Jakarta.

[5] Hinkelmann, K. and O. Kempthorne. 2005. ***Design and Analysis of Experiments***. John Wiley and Sons, Inc. New York.

[6] Jaggi S. & P. K. Batra. 2010. ***Confounding In Factorial Experiments and Fractional Factorials***. http://www.iasri.res.in/ebook/EB_SMAR/e-book_pdf%20files/ Manual%20III/6-Confounding.pdf. 14 Juli 2010.

[7] Kempthorne, O. 1947. ***A Simple Approach To Confounding And Fractional Replication In Factorial Experiments***. Biometrika 34: 255-272.

[8] Kurkjian, B. & M. Zelen. 1961. ***A Calculus For Factorial Arrangements***. The Annals of Mathematical Statistics 33: 600-619.

[9] Montgomery, D.C. 2001. ***Design and Analysis of Experiments, fifth Edition***. John Wiley and Sons, Inc. New York.

[10] Nugroho, S. 2008. ***Dasar-dasar Rancangan Percobaan***. UNIB Press. Bengkulu.

[11] Raktoe, B.L., A. Hedayat, and W.T. Federer. 1981. ***Faktorial Designs***. John Wiley and Sons, Inc. New York.

[12] Steel, R.G.D. dan J.H. Torrie.1993. ***Prinsip dan Prosedur Statistika Suatu Pendekatan Biometrik***. PT Gramedia Pustaka Utama. Jakarta.