Jurnal Gradien Vol. 10 No. 2 Juli 2014 : 1018-1024

ISSN 0216-2393

Model Antrian Multi Layanan

Siska Yosmar

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Bengkulu, Indonesia

Diterima 19 April; Disetujui 8 Juni 2014

Abstrak - Salah satu permasalahan yang sering kita temui dan alami dalam kehidupan sehari-hari adalah antrian. Antrian yang panjang sering dijumpai dibank saat nasabah mengantri di telller atau di ATM untuk melakukan transakasi, di bandara udara saat para calon penumpang melakukan *check-in,* di supermarket saat para pembelanja antri untuk melakukan pembayaran, mobil atau motor yang menunggu di lampu merah, pasien yang menunggu di klinik rawat jalan dan masih banyak contoh lainnya. Bagi sebagian orang antri merupakan hal yang membosankan apalagi terlalu lama antri dan sebagai akibatnya pelanggan akan kabur. Hal ini merupakan kerugian bagi perusahaan tersebut. Untuk mempertahankan pelanggan, sebuah perusahaan selalu berusaha memberikan pelayana yang terbaik. Pelayanan yang terbaik tersebut antara lain memberikan pelayanan yang cepat sehingga pelanggan tidak dibiarkan menunggu terlalu lama. Tetapi dampak pemberian layanan yang cepat ini akan memunculkan biaya, karena harus menambah fasilitas layanan. Oleh karena itu dibutuhkan analisa untuk mempertahankan pelanggan dan dalam jangka panjang akan meningkatkan keuntungan perusahaan. Pada penelitian ini hanya membahas tentang antrian multi layanan dengan disiplin antrian FCFS (*First Come, First Served*), yaitu yang datang pertama akan dilayani pertama. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui bagaimana model antrian multi layanan, memberikan informasi tentang rata-rata waktu antrian, analisa biaya dan jumlah pelayan optimum.

Keyword: **Antrian multi layanan, distribusi kedatangan, distribusi waktu pelayanan, jumlah pelayanan optimum**

1. Pendahuluan

Permasalahan - permasalahan yang terjadi di sekitar kita dapat diselesaikan secara matematis. Salah satu permasalahan yang sering kita temui dan alami adalah antrian. Antrian yang panjang sering dijumpai dibank saat nasabah mengantri di telller atau di ATM untuk melakukan transakasi, di bandara udara saat para calon penumpang melakukan *check-in,* di supermarket saat para pembelanja antri untuk melakukan pembayaran, mobil atau motor yang menunggu di lampu merah, pasien yang menunggu di klinik rawat jalan dan masih banyak contoh lainnya. Bagi sebagian orang antri merupakan hal yang membosankan apalagi terlalu lama antri dan sebagai akibatnya pelanggan akan kabur. Hal ini merupakan kerugian bagi perusahaan tersebut. Timbulnya suatu antrian disebabkan oleh kapasitas sistem pelayanan tidak sebanding dengan jumlah pelanggan. Karena itulah pelanggan yang datang tidak dapat segera dilayani tetapi haruslah menunggu dalam waktu tertentu sebelum mendapat pelayanan. [2]

Untuk mempertahankan pelanggan, sebuah perusahaan selalu berusaha memberikan pelayana yang terbaik. Pelayanan yang terbaik tersebut antara lain memberikan pelayanan yang cepat sehingga pelanggan tidak dibiarkan menunggu (mengantri) terlalu lama. Tetapi dampak pemberian layanan yang cepat ini akan memunculkan biaya, karena harus menambah fasilitas layanan. Oleh karena itu layanan yang cepat akan sangat membantu untuk mempertahankan pelanggan, dalam jangka panjang akan meningkatkan keuntungan perusahaan.

Dalam teori antrian terdapat banyak sekali model-model antrian yang berbeda. Perbedaan itu disebabkan oleh asumsi-asumsi yang dilakukan pada setiap model juga berbeda-beda. Pada penelitian ini hanya membahas tentang antrian multi layanan dengan disiplin antrian FCFS (First Come, First Served), yaitu yang datang pertama akan dilayani pertama.

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui bagaimana model antrian multi layanan, memberikan informasi tentang rata-rata waktu antrian, analisa biaya dan jumlah pelayan optimum.

Definisi Distribusi Binomial

Bila suatu binomiah dapat menghasilkan sukses dengan peluang p dan gagal dengan peluang $q = 1 - p$ maka distribusi peluang peubah acak binomial x yaitu banyaknya sukses dalam n usaha bebas adalah : [2]

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0,1,2,...$$

Definisi Distribusi Poisson

Distribusi peluang peubah acak Poisson X yang menyatakan banyaknya sukses yang terjadi dalam suatu selang waktu atau daerah tertentu, dinyatakan dengan x diberikan oleh : [2]

$$f(x) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}, \quad x = 0,1,2,...$$

μ menyatakan rata-rata banyaknya sukses yang terjadi persatuan waktu atau daerah tersebut dan e = 2,71828…

Definisi Distribusi Eksponensial

Peubah acak kontinu X berdistribusi eksponensial dengan parameter $\beta > 0$ bila fungsi padat peluangnya berbentuk : [2]

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Definisi Fungsi umum Eksponensial

Untuk deret $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ dari bilangan riil,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x_i}{i!}$$

disebut *fungsi umum eksponensial.* [1].

Disiplin Antrian

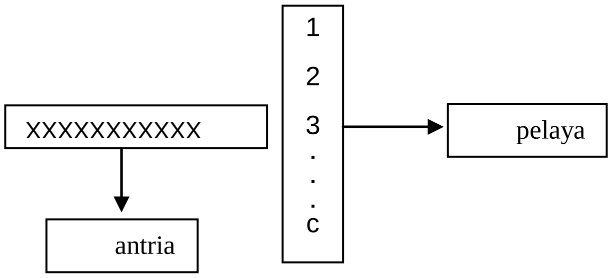
Disiplin antrian secara umum dapat dibagi menjadi empat yaitu : [3]

a. FCFS (First Come, First Served), yaitu yang datang pertama akan dilayani pertama.
b. LCFS (Last Come, First Served), yaitu yang datang terakhir, dilayani pertama.
c. SIRO (Service in random order), yaitu pelayanan dalam urutan acak.
d. PS (Prioroty Service), yaitu pelayanan berdasarkan skala prioritas.

2. Hasil dan Pembahasan

2.1. Antrian Multi layanan (pararel)

Secara umum kita mengenal antrian yaitu antrian tunggal dan antrian multi layanan. Antrian tunggal yaitu antrian yang memiliki satu antrian dengan satu pelayanan. Sedangkan antrian multi layanan adalah antrian yang memiliki satu antrian, tapi pelayananannya lebih dari satu seperti terlihat pada gambar 1. [4]



Gambar 1. Antrian Multi Layanan

2.2. Unsur-unsur Sistem Antrian

Ada beberapa unsur sistem antrian yaitu: [4]

a. Distribusi Kedatangan
   Jika pada setiap interval kecil dari waktu (perbandingan kecil dengan rata-rata waktu antara keadatangan), peluang dari sebuah kedatangan sama untuk setiap interval dan bebas terhadap kedatangan yang lain maka distribusi kedatangan mengikuti distribusi poisson.
b. Distribusi Waktu Pelayanan
   Waktu pelayanan adalah lamanya waktu yang dibutuhkan untuk melayani satu pelanggan (customer). Laju pelayanan dalam melayani pelanggan sangat berpengaruh terhadap panjang antrian. Distribusi waktu pelayanan ini mengikuti distribusi eksponensial.
c. Disiplin Antrian
   Disiplin antrian yang digunakan adalah : FCFS (First Come, First Served), yaitu yang datang pertama akan dilayani pertama

2.3. Distribusi Kedatangan

Misalkan:

Δt = sangat kecil
n = interval dari lebar Δt (sangat besar)
P = peluang kedatangan pada Δt
λ = rata-rata kedatangan pada interval waktu = np
k = bilangan aktual dari kedatangan pada interval waktu

Jika hanya satu kedatangan yang dapat terjadi pada interval tersebut, dan peluangnya akan sama untuk setiap interval maka bilangan aktual dari kedatangan k pada n diberikan oleh fungsi peluang berdistribusi binomial $P(k|n,p)$ yaitu:

$$P(k|n,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Jika k = 0 (tidak ada yang datang), maka:

$$P(0|n,p) = (1-p)^n = \left[1 - \left(\frac{\lambda}{n}\right)\right]^n,$$

dimana $p = \lambda/n$

Pengembangan $\left[1 - \left(\frac{\lambda}{n}\right)\right]^n$ dalam deret tak hingga, n menjadi besar : [1]

$$P(0|n,p) \cong 1 - \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} - \frac{\lambda^3}{3!} + ...$$

Ini disebut dengan deret eksponensial dan konvergen dengan nilai $e^{-\lambda}$, maka:

$$P(0|n,p) \cong e^{-\lambda}$$

Kembali ke rumus awal dan ambil rasio dari sukses

$$\frac{P(k+1|n,p)}{P(k|n,p)} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \frac{k!(n-k)!}{n!} \frac{P^{k+1}(1-P)^{n-k-1}}{P^k(1-P)^{n-k}} = \frac{n-k}{k+1}\left(\frac{p}{1-p}\right)$$

$$P(k+1|n,p) = \frac{n-k}{k+1}\left(\frac{p}{1-p}\right) P(k|n,p)$$

untuk k = 1

$$P(1|n,p) = \frac{np}{1-p} P(0|n,p)$$

$$= \frac{\lambda}{1-\left(\frac{\lambda}{n}\right)} e^{-\lambda}$$

$$P(1|n,p) \cong \lambda e^{-\lambda}$$

Untuk k = 2

$$P(2|n,p) = \frac{(n-1)p}{2(1-p)} P(1|n,p)$$

$$= \frac{\lambda - \frac{\lambda}{n}}{2\left[1-\left(\frac{\lambda}{n}\right)\right]} \lambda e^{-\lambda}$$

$$\cong \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2}$$

Dengan proses yang sama maka diperoleh bentuk umumnya adalah :

$$P(k|n,p) \cong \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Ini terkenal dengan hampiran poisson untuk distribusi binomial dalam lim $\Delta t \to 0$, $p \to 0$ dan n sangat besar. Peluang kedatangan k pada interval waktu, ketika nilai harapan dari kedatangan = λ maka :

$$P_k(1) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

dimana 1 menunjukkan satu unit dari waktu.

Ini berdistribusi poisson dengan parameter λ. Pada periode unit waktu untuk harapan dari kedatangan λt maka:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

Pada interval 0 sampai t, peluang tidak ada kedatangan (k=0) adalah :

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

Peluang ada kedatangan adalah :

$$P\{T < t\} = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

dimana T adalah waktu untuk kedatangan berikutnya.

2.4. Distribusi Waktu Pelayanan

Misalkan :

Δt = sangat kecil

n = interval dari lebar Δt (sangat besar)

P = Peluang bahwa pelayanan berakhir pada Δt

μ = rata-rata pelayanan pada unit Interval waktu (layanan bersifat kontinu)

$\mu = n\,p$

Kasus ini sama seperti pada distribusi kedatangan. Sehingga jika t = 0 dimulai dari layanan maka peluang layanan dengan waktu t adalah dengan mensubsitusi $\lambda = \mu$ pada $P_0(t) = e^{-\lambda t}$ menjadi :

$$P_0(t) = e^{-\mu t} \text{ dan } P\{T < t\} = 1 - e^{-\mu t}, \quad t \geq 0$$

2.5. Bentuk Antrian Multi Layanan

Keterangan notasi-notasi yang digunakan:

λ = rata-rata kedatangan per unit waktu

μ = rata-rata layanan per unit waktu

ρ = intensitas kemacetan = λ/μ

n = state dari sistem

Pn = peluang sistem pada state n
Ls = jumlah pelanggan didalam sistem
Lq = jumlah pelanggan didalam antrian
Ws = waktu menunggu didalam sistem
Wq = waktu menunggu didalam antrian
c = jumlah pelayan

Sistem yang dimaksud diatas terdiri dari antrian dan pelayanan.

Para pelanggan tiba dengan laju konstan λ dan maksimum *c* pelayanan dapat dilayani secara berbarengan. Laju pelayanan per pelayan juga konstan = μ. Pengaruh terakhir dari penggunana *c* pelayan yang paralel adalah mempercepat laju pelayanan dengan memungkinkan dilakukannya beberapa pelayanan secara bersamaan.

Jika $n \geq c$ maka laju pelayanannya = $c\mu$.

Jika $n < c$ maka laju pelayanan = $n\mu$.

Misalkan Δt adalah interval waktu (sangat kecil).

Tabel 1. Peluang Kedatangan dan Layanan

State	Kedatangan	Layanan	Peluang ($n < c$)	Peluang ($n \geq c$)
$n-1$	Ada	Tidak ada	$\lambda\Delta t$	$\lambda\Delta t$
N	Tidak ada	Tidak ada	$1-\lambda\Delta t - n\mu\Delta t$	$1-\lambda\Delta t - c\mu\Delta t$
$n+1$	Tidak ada	Ada	$(n+1)\mu\Delta t$	$c\mu\Delta t$

Pada kasus khusus terdapat dua kemungkinan yaitu :

a) '0' untuk tidak ada kedatangan dan tidak ada layanan dengan $P_0(t)(1-\lambda\Delta t)$ dan
b) '1' untuk tidak ada kedatangan dan ada layanan dengan $P_1(t)(\mu\Delta t)$

Karena saling bebas maka dapat dijumlahkan :

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)(1-\lambda\Delta t) + P_1(t)(\mu\Delta t)$$
$$= P_0(t) - P_0(t)\lambda\Delta t + \mu P_1(t)\Delta t$$
$$P_0(t+\Delta t) - P_0(t) = -\lambda P_0(t)\Delta t + \mu P_1(t)\Delta t$$

$$\frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)$$

karena $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = 0$

maka $$\lambda P_0(t) - \mu P_1(t) = 0 \qquad (1)$$

untuk *n* < *c*

$$P_n(t+\Delta t) = P_{n-1}(t)(\lambda\Delta t) + P_n(t)(1-\lambda\Delta t - n\mu\Delta t) + P_{n+1}(t)(n+1)\mu\Delta t$$
$$= \lambda P_{n-1}(t)(\Delta t) + P_n(t) - \lambda P_n(t)\Delta t - n\mu P_n(t)\Delta t + n\mu P_{n+1}(t)\Delta t + \mu P_{n+1}(t)\Delta t$$
$$P_n(t+\Delta t) - P_n(t) = \lambda P_{n-1}(t)(\Delta t) - \lambda P_n(t)\Delta t - n\mu P_n(t)\Delta t + n\mu P_{n+1}(t)\Delta t + \mu P_{n+1}(t)\Delta t$$
$$\frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = \lambda P_{n-1}(t) - \lambda P_n(t) - n\mu P_n(t) + n\mu P_{n+1}(t) + \mu P_{n+1}(t)$$
$$\lambda P_{n-1} - (\lambda + n\mu)P_n + (n+1)\mu P_{n+1} = 0 \qquad (2)$$

untuk *n* ≥ *c*

$$P_n(t+\Delta t) = P_{n-1}(t)(\lambda\Delta t) + P_n(t)(1-\lambda\Delta t - c\mu\Delta t) + P_{n+1}(t)(c\mu\Delta t)$$
$$= \lambda P_{n-1}(t)(\Delta t) + P_n(t) - \lambda P_n(t)\Delta t - c\mu P_n(t)\Delta t + c\mu P_{n+1}(t)\Delta t$$
$$P_n(t+\Delta t) - P_n(t) = \lambda P_{n-1}(t)\Delta t - \lambda P_n(t)\Delta t - c\mu P_n(t)\Delta t + c\mu P_{n+1}(t)\Delta t$$
$$\frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda + c\mu)P_n(t) + c\mu P_{n+1}(t)$$
$$\lambda P_{n-1} - (\lambda + c\mu)P_n + c\mu P_{n+1} = 0 \qquad (3)$$

Dari persamaan (1), (2) diperoleh sebuah deret :

$$\lambda P_0 - \mu P_1 = 0$$
$$\lambda P_0 - (\lambda + \mu)P_1 + 2\mu P_2 = 0 \quad (4)$$
$$\lambda P_1 - (\lambda + 2\mu)P_2 + 3\mu P_3 = 0 \quad (5)$$
$$\lambda P_2 - (\lambda + 3\mu)P_3 + 4\mu P_4 = 0 \quad (6)$$

Sehingga diperoleh solusinya **:**

$$\lambda P_0 = \mu P_1 \,, \qquad P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$$

Kemudian subtitusi ke (4)

$$\mu P_1 - (\lambda + \mu)P_1 + 2\mu P_2 = 0$$
$$2\mu P_2 = \lambda P_1 \qquad P_2 = \frac{\lambda}{2\mu} P_1 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} P_0$$

Lalu substitusi ke (5)

$$2\mu P_2 - (\lambda + 2\mu)P_2 + 3\mu P_3 = 0$$
$$3\mu P_3 = \lambda P_2 \,, \qquad P_3 = \frac{\lambda}{3\mu} P_2 = \frac{\lambda^3}{6\mu^3} P_0$$

Selanjutnya substitusi ke (6)

$$3\mu P_3 - (\lambda + 3\mu)P_3 + 4\mu P_4 = 0$$
$$4\mu P_4 = \lambda P_3 \,, \qquad P_4 = \frac{\lambda}{4\mu} P_2 = \frac{\lambda^4}{10\mu^4} P_0$$

Sehingga didapatkan bentuk umumnya (P_n untuk n < c) adalah :

$$P_n = \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} P_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{P_0}{n!} = \frac{\rho^n}{n!} P_0$$

dimana $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$

Dengan melakukan cara yang sama, maka P_n untuk $n \geq c$ adalah :

$$P_n = \frac{\lambda^n}{\mu(2\mu)\ldots(c-1)\mu\underbrace{(c\mu)(c\mu)\ldots(c\mu)}_{(n-c)kali}} P_0$$

$$P_n = \frac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n} P_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{P_0}{c!c^{n-c}} = \frac{\rho^n}{c!c^{n-c}} P_0$$

Nilai P_0 ditentukan dari $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ yang memberikan

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{1}{c!}\sum_{n=c}^{\infty} \frac{\rho^n}{c^{n-c}}}$$
$$= \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!}\sum_{n=c}^{\infty} \frac{\rho^{n-c}}{c^{n-c}}\right]^{-1}$$
$$= \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!}\left(\frac{1}{1-\frac{\rho}{c}}\right)\right]^{-1}$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{(c-1)!(c-\rho)}\right]^{-1}$$

dimana ρ/c <1 atau $\lambda/\mu c$<1.

Ekspresi umtuk L_q diperoleh sebagai berikut :

$$L_q = \sum_{n=c}^{\infty} (n-c)P_n$$
$$= \sum_{n=c}^{\infty} \frac{(n-c)\rho^n}{c!c^{n-c}} P_0$$
$$= \frac{P_0}{c!}\left(\frac{\rho^{c+1}}{c} + \frac{2\rho^{c+2}}{c^2} + \ldots\right)$$
$$= \frac{P_0}{c!}\left(\frac{\rho^{c+1}}{c}\right)\left[1 + 2\frac{\rho}{c} + 3\left(\frac{\rho}{c}\right)^2 + \ldots\right]$$
$$= \frac{\rho^{c+1}P_0}{c!c\left(1-\frac{\rho}{c}\right)^2}$$

$$L_q = \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} P_0 \,, \qquad \frac{\rho}{c} < 1$$

Sehingga diperoleh :

$$L_s = L_q + \rho$$
$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$
$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Persentase pemanfaatan sebuah sarana pelayanan dengan c pelayan yang paralel dapat dihitung sebagai berikut :

$$\text{Persentase pemanfaatan} = \frac{L_s - L_q}{c} \times 100$$

2.6. Jumlah Pelayanan Optimum

Keterangan notasi-notasi :

C = jumlah pelayanan
EOC(c)= biaya pengoperasian sarana per unit waktu
EWC(c)= biaya menuggu per unit waktu
ETC(c)= biaya total per unit waktu
C_1 = biaya per pelayan tambahan per unit waktu
C_2 = biaya per unit waktu menuggu per pelanggan
L_s(c) = jumlah pelanggan dalam sistem dengan diketahui c

Penentuan c yang meminimumkan :

ETC(c) = EOC(c) + EWC(c)

Nilai optimum c harus memenuhi kondisi berikut ini:

ETC(c-1) $\geq$ ETC(c) dan ETC(c+1) $\geq$ ETC(c)

Sebagai aplikasi dari kondisi ini, pertimbangan fungsi biaya berikut ini :

EOC(c) = C_1c

EWC(c) = C_2L_s(c)

Dengan menerapkan kondisi tersebut maka diperoleh :

$$L_s(c) - L_s(c+1) \leq \frac{C_1}{C_2} \leq L_s(c-1) - L_s(c)$$

Nilai $\frac{C_1}{C_2}$ menunjukkan dimana pencarian untuk c optimum harus dimulai.

2.7. Penerapan Sistem Antrian Multin Layanan

Sebuah toko Funiture mempunyai tiga loket pembayaran (3 kasir) dengan antrian tunggal untuk pelanggan menunggu. Pelanggan datang secara acak dengan rata-rata 72 per jam dan waktu rata-rata per pelanggan ($1/\mu$) adalah 2 menit. Diperkirakan biaya waktu menunggu per pelanggan adalah Rp 6.000,00 per jam dan biaya penambahan per kasir adalah Rp 3.000,00 per jam.

Manager keuangan toko tersebut ingin mengetahui berapa lama waktu menunggu dalam antrian tersebut dan apakah waktu tersebut telah efektif atau belum. Dan apakah perlu penambahan kasir. Semua yang diinginkan manager keuangan oleh tersebut dapat dijawab dengan menggunakan dengan model antrian mutli layanan dan jumlah pelayan optimum.

Analisis data :

- Rata-rata kedatangan pelanggan (λ)

  λ = 72 orang per jam
- Rata-rata pelayanan (μ)

  $\mu = 60 \times \frac{1}{\mu} = 60 \times \frac{1}{2} = 30$ orang per jam
- Intensitas kemacetan

  $$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{72}{30} = 2,4$$
- Jumlah pelanggan dalam antrian (L_q)

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{(c-1)!(c-\rho)} \right]^{-1}$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{2} \frac{(2,4)^n}{n!} + \frac{(2,4)^3}{(3-1)!(3-2,4)} \right]^{-1}$$

$$= \left[1 + 2,4 + \frac{(2,4)^2}{2} + \frac{(2,4)^3}{1,2} \right]^{-1}$$

$$= 0.056$$

$$L_q = \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} P_0$$

$$= \frac{(2,4)^4}{(3-1)!(3-2,4)^2}(0.056)$$

$$= 2.58$$

- Jumlah pelanggan dalam sistem

  $L_s = L_q + \rho$ = 2,58 + 2,4 = 4,98
- Waktu menunggu dalam antrian

  $W_q = L_q / \lambda$=2,58/72=0,036 jam = 2,2 menit
- Waktu sistem antrian

  $W_s = W_q + 1/\mu$= 2,2 + 2 = 4,2 menit
- Persentase pemanfaatan

  $$\frac{L_s - L_q}{c} \times 100$$

  Persentase pemanfaatan =

  $$= \frac{4,98 - 2,58}{3} \times 100$$

  $$= 80\%$$
- Jumlah pelayan optimum

  C1 = Rp 3.000,00 / jam

  C2 = Rp 6.000,00 / jam

  EOC(c) = C_1c

  EWC(c) = C_2L_s(c)

  ETC(c) = EOC(c) + EWC(c)

Sehingga diperoleh hasil perhitungan lebih jelas dapat dilihat pada Tabel 2.

Tabel 2. Hasil Perhitungan

c	ρ/c	L_q(c)	L_s(c)	EWC(c)	EOC(c)	ETC(c)	L_s(c-1)-L_s(c)
3	0.8	2.58	4.98	29.880	9.000	38.880	_
4	0.6	0.43	2.83	16.980	12.000	28.980	2.15
5	0.48	0.27	2.67	16.020	15.000	31.020	0.16
6	0.4	0.096	2.5	15.000	18.000	33.000	0.17

Untuk jumlah pelayan optimum diperoleh :

$$L_s(c) - L_s(c+1) \leq \frac{C_1}{C_2} \leq L_s(c-1) - L_s(c)$$

$$L_s(4) - L_s(5) \leq \frac{3.000}{6.000} \leq L_s(3) - L_s(4)$$

$$2,83 - 2.67 \leq 0,5 \leq 4,98 - 2,83$$

$$0,16 \leq 0,5 \leq 2,15$$

Berarti jumlah kasir optimum adalah 4.

Berdasarkan hasil perhitungan di atas maka semua pertanyaan manager keuangan toko tersebut dapat dijawab bahwa waktu menunggu dengan 3 kasir yaitu 2,2 menit sudah cukup kecil dengan tingkat pemanfatan yang cukup tinggi yaitu 80% . Toko Furniture tidak perlu menambah kasir tapi jika dilihat dari jumlah pelayan opitum dan total biaya lebih baik toko tersebut menambah satu kasir lagi. Karena total biaya akan berkurang kira-kira sebesar Rp 10.000,00 per jam dan waktu menunggu dalam antrian akan lebih kecil yaitu menjadi :

$$W_q=L_q/\lambda=0,43/72=0,0597\text{jam}$$

atau sama dengan 0,36 menit.

3. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan diatas dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Jika distribusi kedatangan mengikuti distribusi poisson dengan parameter λ, maka distribusi waktu pelayanan mengikuti distribusi eksponensial dengan parameter μ.
2. Jumlah Pelanggan di dalam antrian (L_q)
   $$L_q = \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} P_0$$
3. Jumlah pelanggan dalam sistem antrian (L_s)
   $$L_s = L_q + \rho$$
4. Waktu menunggu dalan antrian (W_q)
   $$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$
5. Waktu menunggu dalan sistem antrian (W_s)
   $$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$
6. Jumlah pelayan optimum
   $$L_s(c) - L_s(c+1) \le \frac{C_1}{C_2} \le L_s(c-1) - L_s(c)$$

Daftar Pustaka

[1] Grimaldi, Ralph P. 1994. *Discrete and* Combinatorial *Mathemetics*. New York: Addison-Wesley Publishing Company.

[2] Ross, Sheldon M. 2007. *Introduction to Probability Models.* Ninth Edition. New York : Academy Press.

[3] Taha, Hamdy A. 1997. *Riset Operasi*. Jilid 2. Jakarta : Binarupa Aksara.

[4] Taylor, Howard M. 1984. *An Introduction to Stochastics Modeling*. Orlando, Florida: Academic Press, Inc.