Jurnal Pendidikan Matematika Raflesia
Vol. 06 No. 02, Juli 2021
https://ejournal.unib.ac.id/index.php/jpmr

P-ISSN : 2548-4435 (Media Printed)
E-ISSN : 2615-8752 (Media Online)

Eksplorasi Justifikasi dan Rasionalisasi Mahasiswa dalam Konsep Teori Graf

Tian Abdul Aziz
Universitas Negeri Jakarta
tian_aziz@unj.ac.id

Abstrak

Tujuan penelitian ini adalah mendeskripsikan performa mahasiswa dalam memberikan justifikasi dan rasionalisasi terhadap empat buah pernyataan tentang konsep Teori Graf dalam konteks perkuliahan Matematika Diskrit. Penelitian ini adalah studi kasus dan melibatkan sebanyak 23 mahasiswa semester enam di salah satu perguruan tinggi negeri di Jakarta. Respon mahasiswa dianalisis dan dikelompokkan ke dalam empat kategori berdasarkan justifikasi dan rasionalisasinya. Temuan dari penelitian ini adalah bahwa sebagian besar mahasiswa belum dapat memberikan justifikasi dan rasionalisasi yang tepat terhadap empat pernyataan yang diberikan. Terkadang justifikasi tidak sejalan dengan rasionalisasi yang diberikan. Berdasarkan temuan tersebut, didapatkan bahwa keberhasilan atau kegagalan mahasiswa dalam memberikan justifikasi dan rasionalisasi setidaknya dipengaruhi oleh tiga faktor pendukung atau penyebab, yaitu: (1) pemahaman konsep, (2) koneksi matematis, dan (3) pembuktian matematika. Terdapat implikasi dari hasil penelitian ini.

Kata kunci : Eksplorasi, Justifikasi, Rasionalisasi, Teori Graf, Mahasiswa

Abstract

The purpose of this study is to describe the performance of students in providing justification and reason of four statements about the concept of Graph Theory in the context of discrete mathematics course. This research was a case study and involved 23 sixth semester students at a public university in Jakarta. Student responses were analyzed and grouped into four categories based on their justification and rationalization. The findings of this study are that most of the students have not been able to provide proper justification and rationalization for the four statements given. Sometimes the justification is sometimes not in line with the reason given. Based on these findings, it was found that the success or failure of students in providing justification and reason was at least influenced by three supporting factors, namely: (1) conceptual understanding, (2) mathematical connection, and (3) mathematical proof. The implications of the results of this study are presented.

Keywords : Exploration, Justification, Reasoning, Graph Theory, Students

Jurnal Pendidikan Matematika Raflesia
Vol. 06 No. 02, Juli 2021
https://ejournal.unib.ac.id/index.php/jpmr

P-ISSN : 2548-4435 (Media Printed)
E-ISSN : 2615-8752 (Media Online)

1. Pendahuluan

Teori graf, pada umumnya, merupakan konsep dasar dan menjadi bagian dari mata kuliah matematika diskrit yang diberikan dalam kurikulum ilmu komputer. Namun, mata kuliah matematika diskrit yang mencakup di dalamnya terdapat konsep teori graf tersebut juga diberikan kepada mahasiswa program studi Pendidikan matematika di berbagai Lembaga Pendidikan tinggi di Indonesia sebagai mata kuliah wajib. Menurut Marion (1991) mata kuliah ini dapat diberikan untuk memenuhi kebutuhan mahasiswa yang memiliki talenta matematika, selain bagi mahasiswa di program ilmu komputer. Inti dari mata kuliah ini adalah abstraksi matematika (Marion, 1991). Selain itu, karakteristik utama dari mata kuliah ini adalah berkaitan dengan objek diskrit.

Graf merupakan struktur diskrit yang terdiri dari simpul-simpul dan sisi yang menghubungkan simpul-simpul tersebut (Rosen & Krithivasan, 2012). Berdasarkan sejarah, Teori Graf ini digagas pertama kali oleh seorang matematikawan Swiss bernama Leonhard Euler (1736). Teori ini didasarkan pada permasalahan jembatan Königsberg. Di kota Königsberg terdapat empat buah daratan yang dihubungkan dengan tujuh jembatan. Pada saat itu terdapat pertanyaan yang beredar di masyarakat setempat, yaitu: Apakah seorang dapat berjalan-jalan di kota sedemikian rupa sehingga setiap jembatan akan dilintasi tepat satu kali? Euler berhasil menyajikan solusi untuk permasalahan ini. Dengan melakukan perumusan matematis, Euler mengenalkan Lintasan dan Sirkuit Euler. Lintasan Euler merupakan lintasan yang melalui setiap sisi di dalam sebuah graf tepat satu kali. Jika lintasan tersebut Kembali ke simpul awal, maka akan terbentuk lintasan tertutup atau sirkuit dan dinamakan sirkuit Euler. Dengan teori ini, Euler menyimpulkan bahwa perjalanan tersebut tidak mungkin (Hopkins, 2009).

Teori graf ini tidak tunggal dan berkembang sampai sekarang. Secara konsep, teori graf diantaranya mencakup jenis-jenis graf dan representasinya, graf isomorfik, graf bidang, lintasan dan sirkuit Euler, lintasan dan sirkuit Hamilton, lintasan terpendek, persoalan pedagan keliling, persoalan tukang pos Cina, perwarnaan graf. Bahkan, dengan berkembangnya teknologi dan penemuan dalam teori graf, Teori graf dijadikan sebuah mata kuliah tersendiri di program studi matematika atau ilmu komputer.

Graf telah terbukti dapat dimanfaatkan sebagai alat pemodelan untuk menyelesaikan berbagai masalah dalam ilmu komputer, riset operasi, dan ilmu sosial dan alam. Dalam ilmu komputer, peran graf tidak bisa dihindarkan. Contoh lain aplikasi graf diantaranya adalah di mana proses pengiriman barang dari suatu tempat ke berbagai tempat yang lain dapat dimodelkan dan diselesaikan dengan aplikasi graf agar pengiriman ini dapat menghemat biaya, waktu, tenaga, dan lain sebagainya. Selain itu, dalam bidang ilmu pengetahuan, khususnya dalam bidang kimia, berbagai model senyawa alkana dapat direpresentasikan atau dimodelkan dalam bentuk graf. Oleh karena itu, teori graf telah diaplikasikan dalam berbagai konteks ilmu pengetahuan.

P-ISSN : 2548-4435 (Media Printed)
E-ISSN : 2615-8752 (Media Online)

Dilihat dari segi pedagogis, teori graf ini penting untuk dipahami oleh pelajar karena topik ini membantu dalam mengembangkan beragam kemampuan matematis, seperti: pemecahan masalah (S Wahyuningsih, Satyananda, & Qohar, 2020), berpikir kritis (Santoso, 2018), berpikir kreatif (Suyitno, Suyitno, Rochmad, & Dwijanto, 2019; S Wahyuningsih et al., 2020), bernalar (Marion, 1991), komunikasi matematis, representasi matematis (Quinn, 2015) berpikir matematis (Mert Uyangör, 2019), dan pengembangan kemampuan pemodelan matematis (Medová, Páleníková, Rybanský, & Naštická, 2019). Bahkan, teori graf ini merupakan topik yang penting dipelajari oleh siswa di tingkat menengah atas yang akan melanjutkan karir dalam bidang STEM (*science, mathematics, engineering, and mathematics*) di perguruan tinggi (Hart, 2008). Oleh karena itu, pengenalan teori graf secara langsung maupun tidak langsung kepada siswa di sekolah perlu dilakukan.

Pembelajaran teori graf di perguruan tinggi telah didesain sedemikian rupa sehingga mahasiswa dapat memaksimalkan kemampuannya. Penelitian yang telah dilakukan pada umumnya lebih banyak memfokuskan pada implementasi penggunaan ICT atau berbagai model atau strategi pembelajaran untuk meningkatkan beragam kemampuan matematis dalam perkuliahan teori graf. Hal ini dapat dilihat dari beragam hasil penelitian yang telah dilakukan. Sebagai contoh, penggunaan digital multimedia dalam perkuliahan teori graf dapat membantu meningkatkan kemampuan mahasiswa dalam pemecahan masalah secara kreatif (S Wahyuningsih et al., 2020). Selain itu penggunaan *blended learning* (Sapti Wahyuningsih, Satyananda, & Ghosh, 2018), *learning management system* (Pardamean, Suparyanto, & Kurniawan, 2013), dan *open ended problems* (Suyitno et al., 2019) telah terbukti membantu berbagai kebutuhan mahasiswa untuk meningkatkan kemampuan yang ditargetkan.

Literatur juga telah menyajikan berbagai kesulitan dan kesalahan yang dihadapi oleh mahasiswa dalam memahami teori graf. Beberapa kesulitan yang ditemukan adalah, diantaranya: (1) kesulitan dalam memahami pengetahuan dasar teori graf untuk memecahkan masalah; (2) kesulitan dalam membuktikan atau memberikan alasan; dan (3) kesulitan dalam penggunaan definisi dan teorema (Thada, Hiengrat, & Nakprasit, 2013). Selain itu, Medová, Páleníková, Rybanský, dan Naštická (2019) mengungkap kesalahan-kesalahan yang dilakukan oleh 127 mahasiswa dalam menyelesaikan tiga permasalahan terkait masalah tukang pos Cina, lintasan terpendek, dan pohon rentang minimum. Kesalahan-kesalahan tersebut dikategorikan ke dalam empat kategori yang berbeda di setiap soal yang diberikan. Kesalahan pendekatan, kesalahan estimasi, kesalahan numerik, dan kesalahan grafik adalah contoh beberapa kesalahan yang dilakukan. Medová dkk., (2019) menambahkan bahwa penyebab kesalahan yang dilakukan adalah kecerobohan terhadap operasi artimatika yang sederhana dan tidak memperhatikan penjelasan yang terdapat dalam buku catatan mereka.

Selain itu, dalam penelitian yang dilakukan oleh Hazzan dan Hadar (2005) terhadap 17 mahasiswa yang mengambil mata kuliah "*Selected Algorithms in Graph Theory*", disebutkan bahwa teori graf merupakan salah satu topik yang

P-ISSN : 2548-4435 (Media Printed)
E-ISSN : 2615-8752 (Media Online)

memerlukan pengurangan tingkat abstraksi. Akan tetapi, tingkat abstraksi orang berbeda terhadap suatu objek matematika. Abstraksi ini menggambarkan kedekatan atau hubungan seseorang dengan suatu objek. Menurut Hazzan dan Hadar (2005), pengurangan tingkat abstraksi ini dilakukan secara mental dengan melibatkan dua strategi, yaitu: (1) konsepsi proses; dan (2) spesifikasi. Hazzan dan Hadar (2005) menganggap konsepsi proses dapat lebih membantu bagi mahasiswa daripada konsepsi objek. Hal ini disebabkan bahwa konsepsi proses merujuk pada penyajian objek dan eksekusi algoritma yang rumit dalam operasi matematis. Sedangkan, dalam spesifikasi, mahasiswa memfokuskan bekerja pada kasus tertentu untuk mengurangi tingkat abstraksi. Menurut Polya (2014), fokus pada kasus yang spesifik ini dapat membantu dalam penyelesaian masalah, karena menguraikan suatu kumpulan objek yang banyak dan rumit menjadi hal yang kecil dan terukur. Spesifikasi ini pada akhirnya mengantarkan mahasiswa untuk melakukan penarikan kesimpulan. Hazzan dan Hadar (2005) juga merekomendasikan bahwa pentingnya pengajar atau dosen memperhatikan cara berpikir mahasiswa dalam mempelajari Teori Graf. Selain itu, mereka menyarankan untuk memperluas penelitiannya dan menganalisis konsep yang dimiliki mahasiswa dalam Teori graf dengan melakukan wawancara yang mendalam. Di sisi lain, penelitian yang dilakukan oleh Uyangör (2019) memfokuskan pada proses berpikir yang dilakukan oleh siswa kelas 12 dalam menyelesaikan masalah teori graf dengan menggunakan kerangka teori yang dikembangkan oleh Stacey, Burton, dan Mason (1982), yaitu, mengkhususkan (specializing), menggeneralisasi (generalisasi), menduga (conjecturing), membenarkan (justifying), dan meyakinkan (convincing).

Justifikasi sebagai bagian dari proses berpikir, merupakan salah satu dari tujuan pembelajaran matematika saat ini (Brodie, 2010). Justifikasi, pada umumnya, merujuk pada penentuan kebenaran terhadap sebuah pernyataan atau konjektur matematika dan penyampaian alasannya (Chua, 2017). Alasan atau penalaran yang dimiliki oleh seseorang seharusnya akan mengarahkannya untuk memberikan penentuan validitas dari pernyataan atau konjektur matematika tersebut. Dengan kata lain, justifikasi didasarkan pada rasionalisasi. Namun terkadang, dalam merespon suatu pernyataan matematika justifikasi seseorang tidak sejalan dengan rasionalisasi yang diberikan. Hal ini didukung oleh pernyataan dari Harel dan Sowder (2007) bahwa justifikasi untuk memvalidasi sebuah pernyataan memiliki peran ganda yaitu: untuk memastikan kebenaran sebuah konjektur; dan untuk meyakinkan orang lain bahwa konjektur tersebut benar. Kedua peran ini secara jelas berbeda, karena peran pertama ditujukan untuk menghilangkan keraguan seseorang, sedangkan peran kedua ditujukan untuk menghilangkan keraguan orang lain (Ellis, 2007). Keterkaitan antara justifikasi dan rasionalisasi seseorang dalam merespon sebuah konjektur matematika terkait konsep graf menarik untuk diteliti.

Trend penelitian terkait graf, khususnya dalam bidang Pendidikan belum terlihat secara maksimal. Di Indonesia, belum banyak penelitian yang membahas terkait dengan eksplorasi justifikasi dan rasionalisasi mahasiswa program studi

Jurnal Pendidikan Matematika Raflesia
Vol. 06 No. 02, Juli 2021
https://ejournal.unib.ac.id/index.php/jpmr

P-ISSN : 2548-4435 (Media Printed)
E-ISSN : 2615-8752 (Media Online)

Pendidikan matematika dalam merespon pernyataan teori graf. Penelitian yang telah dilakukan lebih banyak pada pengembangan dan pemilihan desain pembelajaran atau perkuliahan untuk meningkatkan kemampuan mahasiswa yang ditargetkan. Oleh karena itu, penelitian ini berusaha menjawab tantangan tersebut. Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah: Bagaimana justifikasi dan rasionalisasi yang diberikan mahasiswa dalam merespon pernyataan konsep dasar teori graf? Tujuan dari penelitian ini adalah mengeksplorasi justifikasi dan rasionalisai yang diekspresikan oleh mahasiswa dalam merespon beberapa pernyataan tentang konsep dasar teori graf.

Penelitian ini memiliki urgensi baik dilihat dari segi praktik dan teori. Dari sisi teori, engetahuan terkait kesalahan-kesalahan atau kesulitan-kesulitan yang dihadapi oleh mahasiswa dalam memahami konsep teori Graf dapat mengisi kekosongan terkait dengan penelitian teori Graf dalam konteks Pendidikan Tinggi. Secara praktik, hasil penelitian ini dapat membantu pengajar di tingkat pendidikan tinggi untuk mengembangkan desain perkuliahan matematika diskrit yang dapat membantu mahasiswa belajar secara efektif, sehingga mereka mengembangkan kemampuan berpikir yang diharapkan sehingga dapat menyelesaikan berbagai permasalahan yang diberikan.

2. Metode

Penelitian ini adalah penelitian studi kasus yang melibatkan 23 mahasiswa aktif yang terdaftar di program studi Pendidikan matematika di sebuah universitas negeri di Jakarta. Mereka adalah mahasiswa semester enam di mana mereka telah menyelesaikan berbagai mata kuliah dasar matematika, seperti Kalkulus, Pengantar Dasar Matematika, dsb. Dari 23 mahasiswa, 19 diantaranya adalah perempuan dan 4 yang lainnya adalah laki-laki. Penelitian ini dilakukan pada akhir tahun 2020. Dalam penelitian ini mereka bersama-sama mengambil mata kuliah Matematika Diskrit yang di dalamnya mencakup teori graf.

Instrumen yang digunakan dalam penelitian ini adalah berupa tes dimana mahasiswa diberikan empat buah soal. Instrumen tersebut telah divalidasi oleh tiga pakar di bidang Pendidikan matematika dan matematika. Instrumen tersebut sebagian besar dikembangkan sendiri oleh peneliti. Hasil validasi menunjukkan bahwa keempat soal atau pernyataan tersebut telah layak untuk diberikan kepada partisipan penelitian.

Soal tersebut diberikan kepada mahasiswa untuk menguji pemahaman mereka terkait definisi jenis-jenis graf, seperti: graf lengkap, graf teratur, graf bipartite, graf Euler, graf Hamilton, dan graf lingkaran. Terkadang ada beberapa graf yang dapat dikategorikan ke dalam lebih dari satu jenis graf. Oleh karena itu, peneliti ingin melihat sejauh mana mahasiswa memahami irisan di antara definisi jenis-jenis graf tersebut (soal no 1 s.d. soal no 3). Pada soal no 4, mahasiswa diminta untuk memahami sejarah awal munculnya teori graf dengan melihat kasus jembatan Königsberg.

Peneliti membagikan soal kepada mahasiswa secara online dan mahasiswa diminta untuk mengerjakan secara mandiri. Mahasiswa diberikan waktu selama

P-ISSN : 2548-4435 (Media Printed)
E-ISSN : 2615-8752 (Media Online)

40 menit untuk mengerjakan dengan tidak melihat sumber bacaan. Setelah selesai mereka diminta untuk memindai hasil pekerjaan mereka ke dalam *learning management system* yang dimiliki oleh program studi.

Tabel 1. Soal-soal yang diberikan kepada mahasiswa

Soal No	Pernyataan
1	Semua graf teratur adalah graf lengkap
2	Tidak ada graf yang termasuk ke dalam graf euler dan semi-hamilton secara bersamaan.
3	Semua graf lingkaran adalah graf euler dan graf Hamilton.
4	Permasalahan jembatan Konigsberg dapat diselesaikan dengan menggunakan gagasan graf Hamilton

Hasil pekerjaan mahasiswa dianalisis secara kualitatif deskriptif. Peneliti memfokuskan pada justifikasi dan rasionalisasi yang diberikan mahasiswa dalam merespon pernyataan yang diberikan. Berdasarkan hasil pekerjaan mahasiswa didapatkan jawaban jawaban yang sama dan juga jawaban yang berbeda. Jawaban mahasiswa akan diklasifikasikan ke dalam empat kategori, yaitu: Kategori A (Justifikasi tepat dan alasan tepat); Kategori B (Justifikasi tepat dan alasan kurang tepat); Kategori C (Justifikasi tidak tepat); dan Kategori D (Tidak menjawab). Dari tiap kategori tersebut, peneliti melakukan reduksi sehingga didapatkan tema-tema dan kategori tersendiri.

3. Hasil dan Pembahasan

Tabel 2 adalah deskripsi hasil performa mahasiswa dalam merespon setiap pernyataan yang diberikan dilihat dari justifikasi dan rasionalisasi yang diberikan. Pernyataan pertama menuntut mahasiswa untuk menghubungkan konsep dua jenis graf, yaitu graf teratur dan graf lengkap. Berdasarkan tabel di atas, ternyata tidak banyak yang dapat memberikan justifikasi yang tepat dan alasan yang tepat terhadap penyataan ini (39%). Bahkan jumlah ini hampir sama dengan mahasiswa yang memberikan justifikasi yang tidak tepat (35%). Terdapat mahasiswa yang memberikan justifikasi tepat, namun berdasarkan alasan yang kurang tepat (22%). Pernyataan pertama ini sebetulnya sangat sederhana sekali. Definisi graf teratur dan graf lengkap juga dapat dipahami dengan mudah, karakteristik yang dapat dicerna. Mahasiswa jika memahami kedua jenis graf ini dan juga metode pembuktian dengan counter example, maka mahasiswa tersebut akan berhasil memberikan justifikasi dan rasionalisasi yang tepat.

Pernyataan kedua menuntut mahasiswa untuk menarik hubungan antara konsep graf Euler dan graf Semi-hamilton. Berdasarkan Tabel 2, ternyata tidak ada siswa yang memberikan justifikasi yang tepat dan juga alasan yang tepat. Soal ini merupakan soal yang tingkat kategori A-nya sangat rendah yaitu 0%. Sebagian kecil mahasiswa memberikan justifikasi yang tepat, namun alasan yang diberikan tidak sesuai dengan yang diinginkan (22%). Lebih dari setengahnya tidak dapat memberikan justifikasi yang tepat (43%) dan bahkan tidak memberikan respon sama sekali (35%).

P-ISSN : 2548-4435 (Media Printed)
E-ISSN : 2615-8752 (Media Online)

Tabel 2. Distribusi respon mahasiswa untuk tiap pernyataan

No	Pernyataan	Frekuensi (Persentase)			
		Kategori A	Kategori B	Kategori C	Kategori D
1	Semua graf teratur adalah graf lengkap	9 (39%)	5 (22%)	8 (35%)	1 (4%)
2	Tidak ada graf yang termasuk ke dalam graf euler dan semi-hamilton secara bersamaan.	0 (0%)	5 (22%)	10 (43%)	8 (35%)
3	Semua graf lingkaran adalah graf euler dan graf Hamilton.	15 (65%)	4 (17%)	1 (4%)	3 (13%)
4	Permasalahan jembatan Konigsberg dapat diselesaikan dengan menggunakan gagasan graf Hamilton	3 (13%)	1 (4%)	11 (48%)	8 (35%)

Keterangan:
Kategori A: Justifikasi tepat dan alasan tepat
Kategori B: Justifikasi tepat dan alasan kurang tepat
Kategori C: Justifikasi tidak tepat
Kategori D: Tidak menjawab

Pernyataan ketiga menuntut mahasiswa untuk menghubungkan tiga konsep sekaligus, yaitu, graf lingkaran, graf euler, dan graf Hamilton. Berdasarkan Tabel 2 pada pernyataan ketiga ini, sebagian besar mahasiswa dapat menjawabnya dengan memberikan justifikasi dan alasan yang tepat (65%). Pada umumnya mereka menjelaskan definisi dari graf lingkaran, graf euler, dan graf Hamilton. Graf lingkaran sepertinya graf yang paling mudah dicerna oleh mahasiswa. Kemudian berdasarkan definisi tersebut, mereka menerapkan definisi graf euler dan graf Hamilton ke dalam konteks graf lingkaran. Pada akhirnya mereka menyimpulkan bahwa pernyataan semua graf lingkaran termasuk graf Euler dan graf Hamilton adalah benar. Sebanyak 17% mahasiswa memberikan justifikasi yang tepat, namun kurang memberikan alasan yang tepat. Alasan yang mereka kemukakan terkadang tidak fokus pada penjelasan tentang keterkaitan antara ketiganya. Mereka hanya menuliskan definisi dari masing-masing jenis graf tanpa melihat benang merah yang tersirat. Dari semua respon yang dianalisis, tidak ada satupun mahasiswa yang menggunakan contoh dengan memberikan gambar/representasi lainnya untuk memberikan penjelasan yang lebih mendalam tentang keterkaitan antara graf lingkaran dan juga graf Euler dan graf Hamilton.

Pernyataan keempat yang diberikan kepada mahasiswa merupakan soal yang menguji pemahaman mereka tentang sejarah atau awal mula munculnya gagasan teori graf. Bagi mereka yang tidak mengetahui awal mula cerita rakyat yang berkembang pada tahun, kemungkinan akan kesulitan untuk memberikan justifikasi terhadap pernyataan ini. Selain itu, pemahaman terkait aplikasi Graf Euler juga memainkan peranan yang penting untuk memahami pernyataan ini. Berdasarkan table di atas, hanya 13% mahasiswa yang dapat memberikan

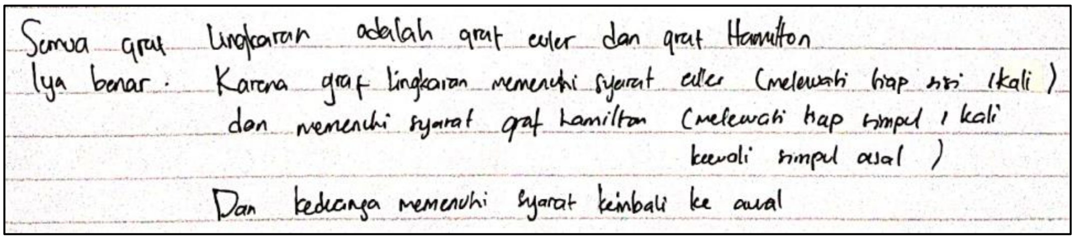
P-ISSN : 2548-4435 (Media Printed)
E-ISSN : 2615-8752 (Media Online)

justifikasi yang tepat dan juga alasan yang tepat. Sebagian besar atau 48% mahasiswa tidak dapat memberikan justifikasi yang tepat.

Berdasarkan respon dari masing-masing pernyataan tersebut, peneliti ingin menggali lebih mendalam tentang respon yang diberikan oleh mahasiswa berdasarkan tiap kategori.

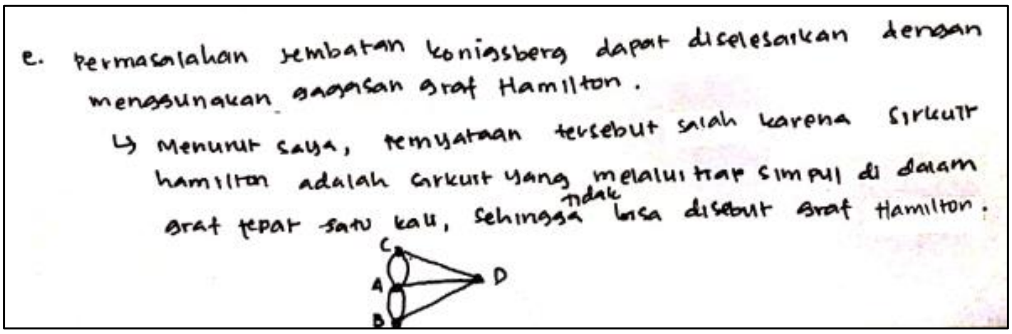
3.1. Kategori A

Berdasarkan data hasil yang diuraikan di atas dan juga hasil analisis dari tiap jawaban yang diberikan oleh mahasiswa, peneliti dapat menggambarkan bahwa jawaban yang tergolong kategori A adalah mereka yang dapat memberikan justifikasi yang tepat dan juga alasan atau rasionalisasi yang tepat pula. Dalam kategori A ini pada pernyataan 3 dan 4, secara umum mahasiswa membuat generalisasi dengan mengekspresikan relasi antar konsep dengan tepat. Secara teknis, mahasiswa menggunakan definisi dari masing-masing konsep dengan menggunakan kalimatnya sendiri dan menarik hubungan diantara konsep-konsep tersebut. Hal ini terlihat dengan jelas dari Gambar 1 di mana mahasiswa mendeskripsikan karakteristik graf lingkaran, graf Euler, dan graf Hamilton serta relasi antar ketiganya.


Semua graf lingkaran adalah graf euler dan graf Hamilton
Iya benar. Karena graf lingkaran memenuhi syarat euler (melewati tiap sisi 1kali)
dan memenuhi syarat graf hamilton (melewati tiap simpul 1 kali
kecuali simpul asal)
Dan keduanya memenuhi syarat kembali ke awal

Gambar 1. Respon mahasiswa pada pernyataan ketiga yang termasuk kategori A

Memahami masing-masing konsep dan keterkaitan antar konsep merupakan kunci keberhasilan mahasiswa dalam memberikan justifikasi dan rasionalisasi. Hal ini sejalan dengan pendapat yang dikemukakan oleh bahwa kemampuan koneksi matematis merupakan salah satu indikator penting dalam kemampuan penalaran (Sumarsih, Budiyono, & Indriati, 2018).

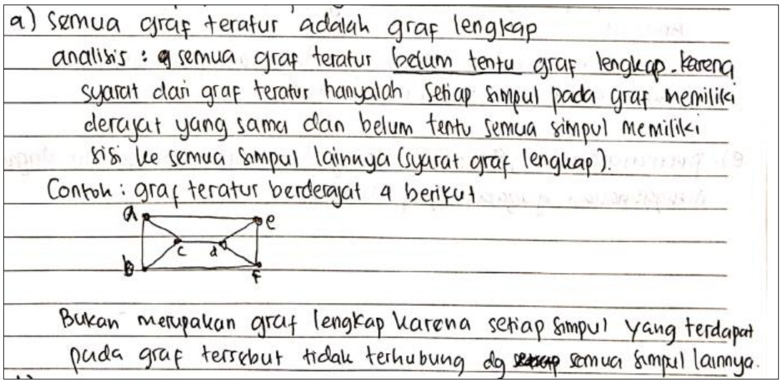

e. Permasalahan jembatan koningsberg dapat diselesaikan dengan
menggunakan gagasan graf Hamilton.
↳ Menurut saya, pernyataan tersebut salah karena sirkuit
hamilton adalah sirkuit yang melalui tiap simpul di dalam
graf tepat satu kali, sehingga tidak bisa disebut graf Hamilton.

Gambar 2. Respon mahasiswa pada pernyataan keempat yang termasuk kategori A

Sedangkan, pernyataan nomor 1 dan nomor 2 menuntut mahasiswa untuk merespon bahwa kedua pernyataan tersebut adalah tidak tepat. Dalam metode

P-ISSN : 2548-4435 (Media Printed)
E-ISSN : 2615-8752 (Media Online)

pembuktian, untuk menunjukkan bahwa suatu pernyataan tersebut tidak tepat adalah dengan menunjukkan satu kasus atau contoh yang berlawanan dengan pernyataan tersebut. Suatu contoh yang diberikan dan berlawanan tersebut dapat menggugurkan pernyataan yang diberikan.


a) semua graf teratur adalah graf lengkap
analisis : semua graf teratur belum tentu graf lengkap. karena syarat dari graf teratur hanyalah setiap simpul pada graf memiliki derajat yang sama dan belum tentu semua simpul memiliki sisi ke semua simpul lainnya (syarat graf lengkap).
Contoh : graf teratur berderajat 4 berikut

Bukan merupakan graf lengkap karena setiap simpul yang terdapat pada graf tersebut tidak terhubung dg ~~setiap~~ semua simpul lainnya.

Gambar 3. Respon mahasiswa pada pernyataan pertama yang termasuk kategori A

Gambar 3 menunjukkan contoh respon mahasiswa dengan menggunakan *counter example*. Mahasiswa mendeskripsikan karakteristik khusus dari graf teratur dan graf lengkap, kemudian melihat adanya ketidakcocokan diantaranya kedua karakteristik tersebut. Setelah itu, mahasiswa memberikan sebuah contoh graf teratur di mana graf tersebut bukan termasuk graf lengkap. Sebetulnya, dengan hanya memberikan contoh tersebut sudah cukup untuk menunjukkan bahwa pernyataan tersebut tidak tepat. *Counter example* merupakan salah satu bagian metode pembuktian dalam matematika. Walaupun Stylianides dan Al-Murani (2010) membedakan penekanan antara proof dan juga refutation, keduanya sangat penting dikembangkan dalam pembelajaran matematika.

3.2. Kategori B

Kategori B merujuk pada respon mahasiswa dengan justifikasi yang tepat, namun tidak memberikan rasionalisasi yang tepat. Peneliti mencoba untuk menganalisis alasan-alasan yang kurang tepat ini dan menemukan bahwa mahasiswa tidak menggunakan metode pembuktian yang tepat dan tidak melihat keterkaitan antara konsep yang dideskripsikan. Hal ini terlihat jelas dari contoh respon mahasiswa pada Gambar 4, 5, dan 6. Pada Gambar 4 dan 5 terlihat bahwa mahasiswa tidak menggunakan *counter example* untuk menunjukkan pada pernyataan tersebut tidak tepat. Mahasiswa hanya memberikan deskripsi yang masih bersifat umum dan belum spesifik karena hanya menguraikan definisi masing-masing. Hal ini bisa disebabkan oleh pengetahuan yang terbatas yang dimiliki oleh mahasiswa tersebut tentang suatu graf yang dapat memiliki berbagai karakteristik.

P-ISSN : 2548-4435 (Media Printed)
E-ISSN : 2615-8752 (Media Online)

Semua graf teratur adalah graf lengkap → salah.
alasan : graf lengkap setiap titiknya terhubung ke setiap titik lain, sedangkan pada graf teratur titiknya cukup memiliki derajat yang sama saja, graf teratur dengan derajat r = 0 merupakan graf kosong

Gambar 4. Respon mahasiswa pada pernyataan pertama yang termasuk kategori B

c. Tidak ada graf yang termasuk ke dalam graf euler dan Semi-hamilton secara bersamaan.
↳ Pernyataan di atas salah karena dalam sebuah graf dapat mengandung sirkuit euler dan lintasan hamilton secara bersamaan, sehingga dapat dikatakan Graf euler sekaligus graf semi-Hamilton //

Gambar 5. Respon mahasiswa pada pernyataan kedua yang termasuk kategori B

Gambar 6 menunjukkan hasil pekerjaan mahasiswa yang hanya mengungkapkan definisi graf lingkaran, tanpa mengungkapkan definisi atau karakteristik graf Euler dan Hamilton. Mahasiswa tersebut mencoba untuk mengaitkan ketiga graf tersebut, namun tidak ada dasar yang kuat dan juga penjelasan yang memadai. Hal ini menunjukkan bahwa mahasiswa tersebut belum memahami konsep graf Euler dan graf Hamilton dengan baik. Sedangkan Gambar 6 menunjukkan bahwa mahasiswa terlihat memahami sejarah Jembatan Konigsberg dengan cukup baik, namun ketika hal tersebut dikaitkan dengan konsep graf Hamilton, mahasiswa tersebut tidak dapat memberikan penjelasan yang rasional. Hal ini dapat disebabkan pengetahuan tentang konsep Graf Hamilton yang kurang baik.

Semua graf lingkaran adalah graf euler dan graf Hamilton.
karena Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua dengan notasi Cn. Setiap graf lengkap adalah graf Hamilton dan graf euler adalah graf terhubung. Sehingga semua graf lingkaran adalah graf euler dan graf Hamilton.

Gambar 6. Respon mahasiswa pada pernyataan ketiga yang termasuk kategori B

Jembatan Konigsberg memiliki 7 buah Jembatan (ganjil) Sehingga Untuk melewati Setiap Jembatan hanya 1 kali, maka dengan gagasan graf hamilton dirasa tidak mungkin,

Gambar 7. Respon mahasiswa pada pernyataan keempat yang termasuk kategori B

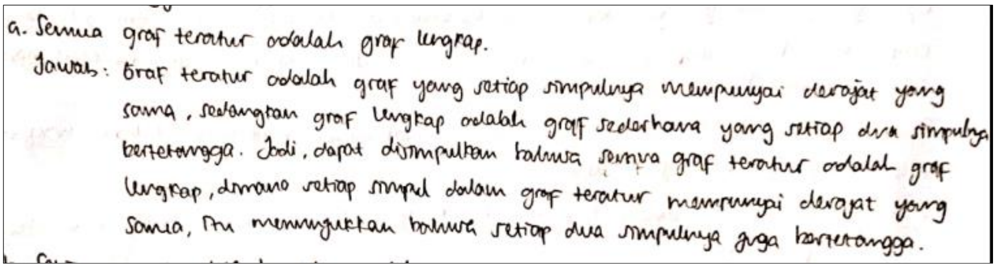
Jurnal Pendidikan Matematika Raflesia
Vol. 06 No. 02, Juli 2021
https://ejournal.unib.ac.id/index.php/jpmr
P-ISSN : 2548-4435 (Media Printed)
E-ISSN : 2615-8752 (Media Online)

Kategori B ini mengarahkan peneliti untuk membuat sebuah dugaan awal tentang ketidaksesuaian antara justifikasi dan rasionalisasi yang diberikan. Hal ini didukung oleh penelitian dari Ellis (2007), bahwa hubungan antara justifikasi dan alasan yang diberikan terkadang tidak linear. Penelitian lebih lanjut untuk menganalisis mengapa mahasiswa memberikan justifikasi yang tepat namun disertai alasan yang kurang tepat perlu dilakukan.

3.3. Kategori C

Kategori C merujuk pada respon mahasiswa dengan justifikasi yang tidak tepat. Peneliti menemukan bahwa justifikasi yang tidak tepat ini dilatarbelakangi oleh alasan yang tidak tepat pula. Alasan yang diuraikan oleh mahasiswa Sebagian besar adalah mendeskripsikan definisi atau karakteristik masing-masing graf, akan tetapi tidak menarik keterkaitan antar konsep graf tersebut. Selain itu, pemahaman yang kurang tepat tentang konsep yang disebutkan juga menjadi penyebab mereka tidak dapat memberikan justifikasi yang tepat. Hal ini dapat dilihat dari beberapa contoh respon mahasiswa yang terdapat pada Gambar 8, 9, 10, dan 11.

Pada Gambar 8, mahasiswa mencoba untuk menguraikan definisi graf teratur dan graf lengkap. Namun, mahasiswa tersebut sepertinya tidak memahami definisi tersebut dan dengan serta merta menarik kesimpulan di mana semua graf teratur adalah graf lengkap. Selain itu, pemahaman tentang terminologi-terminologi yang ada dalam teori graf, seperti: simpul, sisi, derajat, dan lain sebagainya juga memainkan peranan penting untuk memahami definisi. Hal ini terlihat pada respon mahasiswa yang mencoba menghubungkan antara derajat simpul dan konsep *adjacency* dalam graf, namun tidak berhasil.


a. Semua graf teratur adalah graf lengkap.
Jawab: Graf teratur adalah graf yang setiap simpulnya mempunyai derajat yang sama, sedangkan graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap dua simpulnya bertetangga. Jadi, dapat disimpulkan bahwa semua graf teratur adalah graf lengkap, dimana setiap simpul dalam graf teratur mempunyai derajat yang sama, ini menunjukkan bahwa setiap dua simpulnya juga bertetangga.

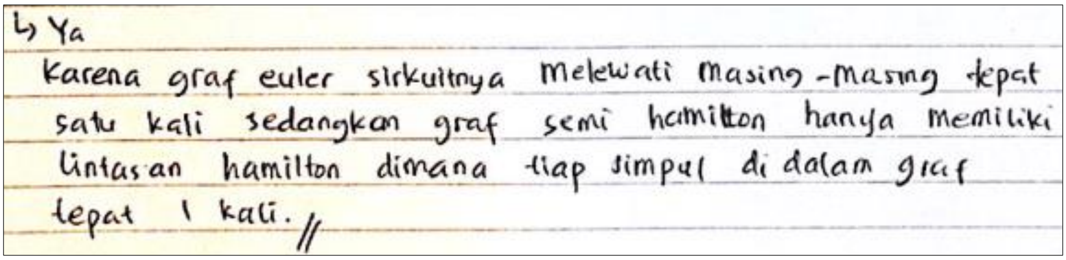
Gambar 8. Respon mahasiswa pada pernyataan pertama yang termasuk kategori C

Selanjutnya, pada Gambar 9, mahasiswa sepertinya tidak memahami dengan baik konsep graf Euler, walaupun dapat mendeskripsikan graf semi-Hamilton dengan cukup baik. Keterkaitan keduanya tidak dijelaskan oleh mahasiswa tersebut. Pernyataan ini menuntut mahasiswa untuk berpikir lebih mendalam dengan mengelaborasi contoh-contoh graf atau bahkan membuat graf yang sesuai dengan apa yang diminta. Seseorang mahasiswa bisa saja tidak bisa menemukan contoh graf tersebut, karena disebabkan pengalaman yang kurang maksimal dalam mempelajari dan berlatih topik graf Euler dan graf semi-Hamilton. Oleh karena itu, pengalaman atau interaksi seseorang dengan suatu topik menentukan keberhasilan seseorang. Selain itu, kemampuan mahasiswa dalam menghubungkan satu konsep dengan konsep yang lain perlu ditingkatkan dalam

Jurnal Pendidikan Matematika Raflesia
Vol. 06 No. 02, Juli 2021
https://ejournal.unib.ac.id/index.php/jpmr

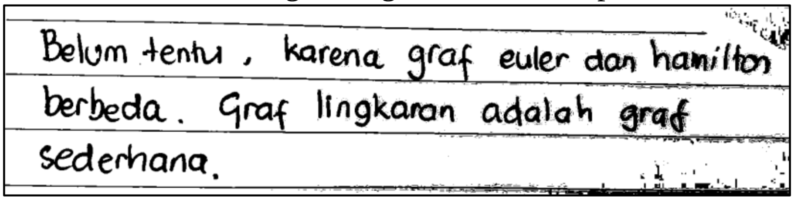
P-ISSN : 2548-4435 (Media Printed)
E-ISSN : 2615-8752 (Media Online)

upaya untuk memiliki pemahaman yang komprehensif sehingga dapat membedakan dengan tepat.


↳ Ya
Karena graf euler sirkuitnya melewati masing-masing tepat
satu kali sedangkan graf semi hamilton hanya memiliki
lintasan hamilton dimana tiap simpul di dalam graf
tepat 1 kali. //

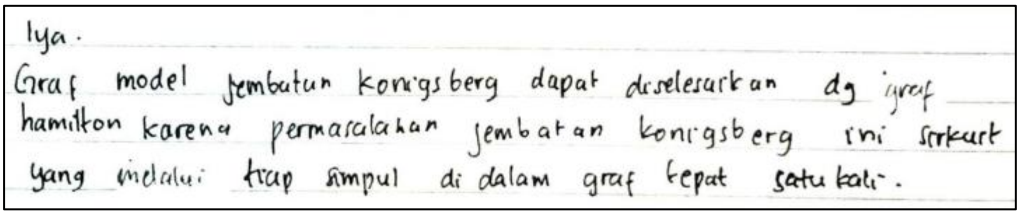
Gambar 9. Respon mahasiswa pada pernyataan kedua yang termasuk kategori C

Gambar 10 menunjukkan sebuah contoh respon mahasiswa terhadap pernyataan ketiga yang masuk pada kategori C. Berdasarkan respon tersebut, mahasiswa dapat membedakan jenis-jenis graf, namun belum bisa menarik benang merah. Pembahasan graf Euler dan graf Hamilton di kelas yang biasanya berdekatan cenderung membawa mahasiswa untuk membandingkannya. Sedangkan pembahasan graf lingkaran yang dibahas jauh di awal membawa mahasiswa untuk menghubungkan dengan pembahasan yang lebih dekat, yaitu graf sederhana. Tampaknya, selang waktu pembahasan yang jauh menjadi hambatan mahasiswa untuk menghubungkan antar konsep.


Belum tentu, karena graf euler dan hamilton
berbeda. Graf lingkaran adalah graf
sederhana.

Gambar 10. Respon mahasiswa pada pernyataan ketiga yang termasuk kategori C

Selain itu, pada Gambar 11, mahasiswa tidak memahami sejarah awal mula permasalahan jembatan Konigsberg. Hal ini terlihat jelas, bahwa jembatan yang seharusnya direpresentasikan dalam bentuk sisi (*edge*), dianggap sebagai simpul oleh mahasiswa tersebut, sehingga kesalahpahamahan ini berakibat justifikasi yang tidak tepat. Pemahaman konteks suatu permasalahan sangat penting agar alternatif strategi yang dipilih dapat menyelesaikan permasalahan. Selain itu, kemampuan merepresentasikan suatu permasalahan juga merupakan hal yang sangat penting untuk mendukung mahasiswa memahami permasalahan tersebut.


Iya.
Graf model jembatan konigsberg dapat diselesaikan dg graf
hamilton karena permasalahan jembatan konigsberg ini sirkuit
yang melalui tiap simpul di dalam graf tepat satu kali.

Gambar 11. Respon mahasiswa pada pernyataan keempat yang termasuk kategori C

P-ISSN : 2548-4435 (Media Printed)
E-ISSN : 2615-8752 (Media Online)

Dalam matematika, mendukung atau menolak suatu konjektur atau dugaan dapat dikaitkan dengan kemampuan membuktikan atau menunjukkan (Ellis, 2007). Dalam membuktikan atau menunjukkan, mahasiswa perlu memahami berbagai metode yang biasa digunakan, seperti pembuktian langsung pembuktian tidak langsung, pembuktian dengan kontradiktif, pembuktian dengan counter example, pembuktian dengan induksi matematika, dsb. Pengetahuan dan pemahaman tentang metode pembuktian ini merupakan dasar yang memiliki peranan penting dalam membantu mahasiswa untuk mengevaluasi suatu pernyataan.

Secara umum, dalam penelitian pernyataan-pernyataan yang diberikan kepada mahasiswa adalah pernyataan-pernyataan yang menuntut mereka untuk mengevaluasi dengan memberikan justifikasi dan juga rasionalisasi dari justifikasi yang diberikan. Rasionalisasi ini dapat kombinasi dari pemahaman konsep yang dimiliki oleh mahasiswa tentang graf, koneksi antar konsep, dan juga pemahaman tentang metode pembuktian.

4. Simpulan dan Saran

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengeksplorasi performa mahasiswa program studi Pendidikan matematika dalam memberikan justifikasi dan rasionalisasi terhadap empat pernyataan terkait teori graf. Respon mahasiswa dianalisis dengan mengklasifikannya ke dalam empat kategori dan juga menguraikannya secara analitik deskriptif. Berdasarkan hasil analisis tersebut dapat ditarik kesimpulan bahwa sebagian kecil mahasiswa dapat memberikan justifikasi dan juga alasan yang tepat. Respon yang benar dan tepat tersebut dapat didukung oleh tiga faktor utama, yaitu pemahaman konsep yang benar tentang suatu konsep, koneksi matematis antar konsep, dan keterampilan dalam melakukan pembuktian matematis yang benar. Selain itu, beberapa justifikasi yang tepat ternyata tidak didukung oleh rasionalisasi yang tepat.

Hal-hal yang dapat diperhatikan berdasarkan hasil penelitian ini adalah bahwa perkuliahan matematika diskrit yang mencakup di dalamnya ada teori graf perlu didesain sedemikian rupa sehingga tingkat abstraksi dari konsep tersebut dapat diturunkan dengan berbagai representasi yang memudahkan mahasiswa dalam memahami konsep. Selain itu, suatu konsep dalam teori graf seharusnya tidak dipahami secara terpisah dengan konsep lain. Melainkan, keterkaitan antar konsep perlu dipelajari, walaupun tidak disinggung dalam buku atau kurikulum. Yang terakhir dan juga paling mendasar adalah bahwa kemampuan dalam membuktikan perlu ditingkatkan dan diperkuat oleh semua mahasiswa terutama mahasiswa di bidang Pendidikan matematika.

Penelitian ini hanya menggunakan satu sumber yaitu, respon tertulis mahasiswa. Oleh karena itu, penelitian ini dapat dilanjutkan dengan memperdalam respon mahasiswa dengan wawancara dengan melihat proses mental yang terjadi dalam melakukan justifikasi dan rasionalisasi. Selain itu, kesulitan-kesulitan mahasiswa dalam mempelajari teori graf perlu dilakukan untuk mendapatkan

P-ISSN : 2548-4435 (Media Printed)
E-ISSN : 2615-8752 (Media Online)

gambaran yang komprehensif sehingga dosen dapat mendesain perkuliahan yang bermakna bagi mahasiswa.

Daftar Pustaka

Brodie, K. (2010). Pressing dilemmas: meaning-making and justification in mathematics teaching. *Journal of Curriculum Studies*, *42*(1), 27–50. https://doi.org/10.1080/00220270903149873

Chua, B. L. (2017). A framework for classifying mathematical justification tasks. In *CERME 10* (pp. 115–122). Dublin, Ireland.

Ellis, A. B. (2007). Connections between generalizing and justifying: Students' reasoning with linear relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 194–229. https://doi.org/https://doi.org/10.2307/30034866

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In J. F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, pp. 805–842). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Hart, E. W. (2008). Vertex-Edge Graphs: An essential topic in high school geometry. *The Mathematics Teacher*, *102*(3), 178–185. https://doi.org/10.5951/MT.102.3.0178

Hazzan, O., & Hadar, I. (2005). Reducing abstraction when learning graph theory. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *24*(3), 255–272.

Hopkins, B. (2009). *Resources for teaching discrete mathematics: Classroom projects, history modules, and articles*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Marion, W. (1991). Discrete mathematics a mathematics course or a computer science course? *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, *1*(3), 314–324. https://doi.org/10.1080/10511979108965624

Medová, Páleníková, Rybanský, & Naštická. (2019). Undergraduate Students' Solutions of Modeling Problems in Algorithmic Graph Theory. *Mathematics*, *7*(7), 572. https://doi.org/10.3390/math7070572

Mert Uyangör, S. (2019). Investigation of the mathematical thinking processes of students in mathematics education supported with graph theory. *Universal Journal of Educational Research*, *7*(1), 1–9. https://doi.org/10.13189/ujer.2019.070101

Pardamean, B., Suparyanto, T., & Kurniawan, R. (2013). Assessment of graph theory e-learning utilizing learning management system. *Journal of Theoretical and Applied Information Technology*, *55*(3), 353–358.

Polya, G. (2014). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (2nd ed.). New Jersey: Princeton university press.

Quinn, A. (2015). Using Apps to Visualize Graph Theory. *The Mathematics Teacher*, *108*(8), 626–631. https://doi.org/10.5951/mathteacher.108.8.0626

P-ISSN : 2548-4435 (Media Printed)
E-ISSN : 2615-8752 (Media Online)

Rosen, K. H., & Krithivasan, K. (2012). *Discrete mathematics and its applications: with combinatorics and graph theory* (7th ed.). NewYork: Tata McGraw-Hill Education.

Santoso, E. (2018). Mathematics classroom activities based on some topics in graph theory to develop critical thinking of primary and secondary school students. *International Journal of Indonesian Education and Teaching*, *2*(2), 154–160. https://doi.org/10.24071/ijiet.2018.020207

Stacey, K., Burton, L., & Mason, J. (1982). *Thinking mathematically*. Addison-Wesley.

Stylianides, A. J., & Al-Murani, T. (2010). Can a proof and a counterexample coexist? Students' conceptions about the relationship between proof and refutation. *Research in Mathematics Education*, *12*(1), 21–36. https://doi.org/10.1080/14794800903569774

Sumarsih, Budiyono, & Indriati, D. (2018). Profile of mathematical reasoning ability of 8 th grade students seen from communicational ability, basic skills, connection, and logical thinking. *Journal of Physics: Conference Series*, *1008*(1), 012078. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1008/1/012078

Suyitno, A., Suyitno, H., Rochmad, & Dwijanto. (2019). Graph theory as a tool to track the growth of student's mathematical creativity. *Journal of Physics: Conference Series*, *1321*(3), 032119. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1321/3/032119

Thada, J. J., Hiengrat, C., & Nakprasit, K. (2013). Diagnosing of undergraduate students' mathematical learning difficulties on introduction to graph theory in Faculty of Education, Khon Kaen University. *วารสาร ศึกษา ศาสตร์*, *31*(4), 32–40.

Wahyuningsih, S, Satyananda, D., & Qohar, A. (2020). Improving creative problem solving performance of mathematics students by digital multimedia in graph theory course. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1538, p. 012094). IOP Publishing. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1538/1/012094

Wahyuningsih, Sapti, Satyananda, D., & Ghosh, A. (2018). Implementation of blended learning innovation in graph theory application course to face the education challenge in the 21st century. In *Proceedings of the International Conference on Learning Innovation (ICLI 2017)* (pp. 172–177). Paris, France: Atlantis Press. https://doi.org/10.2991/icli-17.2018.33