

## Kemampuan Mahasiswa dalam Membuktikan Teorema pada Pelabelan *Graceful Graph A- Bintang*

Hari Sumardi<sup>1</sup>, Agus Susanta<sup>2</sup>, Teddy Alfra Siagian<sup>3</sup>  
<sup>1,2,3</sup> Universitas Bengkulu

Email Koresponden: [harisumardi@unib.ac.id](mailto:harisumardi@unib.ac.id)

### Abstrak

Tujuan pada penelitian ini adalah untuk mengetahui bagaimana kemampuan mahasiswa dalam membuktikan teorema pada pelabelan *graceful* pada graph A-Bintang. Metode yang digunakan adalah studi kasus dengan analisis kualitatif. Dari hasil dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa pada indikator melabelkan verteks dan sisi sebanyak 3 orang (23,08%) dengan kriteria A, 2 orang (15,38%) dengan kriteria D, dan 8 orang (61,54%) dengan kriteria E. Pada indikator menggeneralisasi verteks ke dalam fungsi  $f$  sebanyak 2 orang (15,38%) dengan kriteria A, 4 orang (30,77%) dengan kriteria B, 1 orang (7,69%) dengan kriteria C, 5 orang (38,46%) dengan kriteria D, dan 1 orang (7,69%) dengan kriteria E. Pada indikator menggeneralisasi sisi ke dalam fungsi  $f'$  sebanyak 2 orang (15,38%) dengan kriteria A, 4 orang (30,77%) dengan kriteria B, 1 orang (7,69%) dengan kriteria C, 5 orang (38,46%) dengan kriteria D, dan 1 orang (7,69%) dengan kriteria E. Pada indikator mereduksi fungsi menjadi lebih sederhana sebanyak 6 orang (46,15%), 1 orang (7,68%) dengan kategori C, 5 orang (38,66%) dengan kategori D, 1 orang (7,69%) dengan kategori E. Pada indikator menuliskan argumen pada pembuktian sebanyak 2 orang (15,38%) dengan kriteria A, 7 orang (53,85%) dengan kriteria B, 1 orang (7,69%) dengan kategori D, dan 3 orang (23,08%) dengan kategori E.

**Kata kunci :** Kemampuan, Pembuktian, Graph A-bintang, Pelabelan *graceful*

### Abstract

*The purposed of this research is to find out how the students' ability to prove the theorem on graceful labeling on A-Star graphs. The method used is a case study with qualitative analysis. From the results and discussion, it can be concluded that the indicators for labeling vertices and sides are 3 people (23.08%) with criteria A, 2 people (15.38%) with criteria D, and 8 people (61.54%) with criteria E. In the indicator of generalizing vertices into function  $f$  as many as 2 people (15.38%) with A criteria, 4 people (30.77%) with B criteria, 1 person (7.69%) with C criteria, 5 people (38.46%) with D criteria, and 1 person (7.69%) with E criteria. In the indicator generalizing the inward side of the function  $f'$  as many as 2 people (15.38%) with A criteria, 4 people (30.77%) ) with B criteria, 1 person (7.69%) with C criteria, 5 people (38.46%) with D criteria, and 1 person (7.69%) with E criteria. The indicators reduce the function to be simpler as much as 6 people (46.15%), 1 person (7.68%) with category C, 5 people (38.66%) with category D, 1 person (7.69%) with category E. proof as many as 2 people (15.38%) with criteria A, 7 people ng (53.85%) with criteria B, 1 person (7.69%) with category D, and 3 people (23.08%) with category E.*

**Keywords :** Ability, Proof, A-star graph, Graceful labeling

## 1. Pendahuluan

Matematika merupakan ilmu yang bersifat deduktif aksiomatik yang artinya struktur pada matematika diawali dengan istilah yang tidak terdefinisi, lalu selanjutnya istilah yang didefinisikan, dan kemudian disusun sebuah pernyataan yang disebut aksioma dan postulat yang nantinya akan digunakan untuk menyusun teorema (Kartika & Yazidah, 2019). Teorema dibuktikan dengan proses deduktif sehingga memperoleh kebenaran yang berlaku secara umum dalam sistemnya.

Pada matematika di Perguruan Tinggi, pembuktian menjadi indikator utama bagi seorang mahasiswa dalam mengembangkan kematangan bermatematik (Ottens, Gilbertson, Males, & Clark, 2014; Maarif, Perbowo, Noto, & Harisman, 2019). Pembuktian merupakan salah satu kemampuan matematika tingkat lanjut yang dirasakan sebagai kemampuan paling sulit untuk dicapai oleh sebagian besar mahasiswa. Sehingga para praktisi di bidang pendidikan matematika mencurahkan pemikirannya untuk melakukan penelitian dalam upaya mengembangkan kemampuan pembuktian bagi para mahasiswa. Pada akhir-akhir ini, penelitian lebih memfokuskan pada bagaimana cara mahasiswa dapat mengkonstruksi bukti dibandingkan dengan kegiatan mahasiswa untuk bagaimana memahami sebuah bukti yang akan dikonstruksi (Hodds, Alcock, & Inglis Loughborough, 2014).

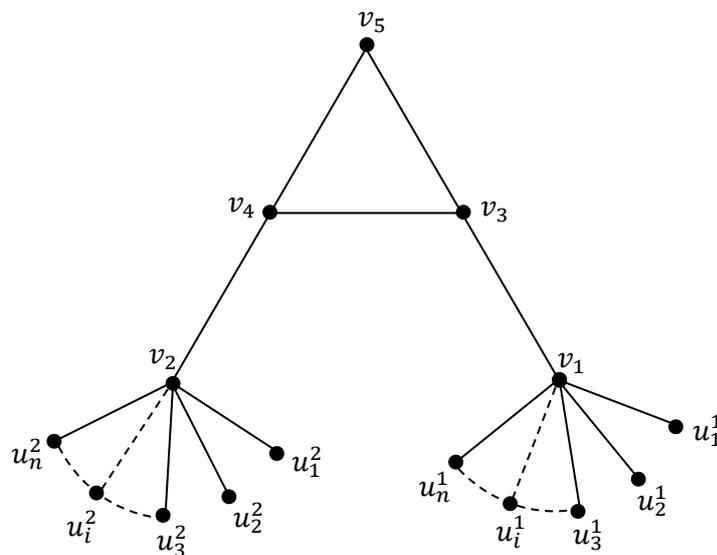
Salah satu matakuliah pada Prodi Pendidikan Matematika yang di dalamnya banyak melibatkan pembuktian adalah matematika diskrit. Matematika diskrit merupakan cabang dari matematika yang membahas segala sesuatu yang bersifat diskrit. Materi yang dibahas dalam matematika diskrit diantaranya adalah teori himpunan, kombinatorial, teori bilangan, fungsi rekursif, fungsi pembangkit, tiga prinsip dasar (prinsip sarang merpati, inklusi-eksklusi, paritas), dan teori graph.

Teori graph pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 saat memecahkan persoalan jembatan Konigsberg. Graph  $G(V, E)$  adalah suatu objek tak kosong yang memuat himpunan titik berhingga yang dinotasikan dengan  $V(G)$  dan himpunan sisi yang berupa pasangan tak berurut dari titik-titik berbeda di yang dinotasikan dengan  $E(G)$  (Brualdi, 2010). Sisi yang dimaksud adalah sisi yang menghubungkan suatu titik  $x$  dengan titik  $y$  pada graph  $G$ . Lintasan dari titik  $u$  ke titik  $v$  dalam suatu graph  $G$  adalah barisan titik dan sisi yang menghubungkan titik  $u$  dan  $v$  pada graph  $G$ . Suatu graph dikatakan terhubung apabila untuk setiap titik dan terdapat lintasan yang menghubungkannya. Jika titik awal dan titik akhir pada lintasan adalah sama maka disebut sebagai lintasan tertutup atau *cycle*. Pada kehidupan sehari-hari, graph dapat diilustrasikan sebagai sebuah peta, dimana titik yang ada adalah persimpangan jalan dan sisinya adalah jalan. Konsep graph berkembang hingga ke pelabelan graph. Salah satu pelabelan dalam graph adalah pelabelan *Graceful*.

Pelabelan *Graceful* pada graph  $G(V, E)$  adalah fungsi injektif  $\alpha$  dari himpunan titik  $V$  ke himpunan bilangan  $\{0, 1, 2, \dots, |E|\}$  yang menginduksi fungsi bijektif  $\alpha'$  dari himpunan sisi  $E$  ke himpunan bilangan  $\{1, 2, \dots, |E|\}$  dimana setiap sisi  $uv \in E$  dengan simpul  $u, v \in V$  berlaku  $\alpha'(u, v) = |\alpha(u) - \alpha(v)|$  (Huda & Amri, 2012). Beberapa graph yang telah dibuktikan memiliki pelabelan graceful diantaranya adalah: graf bintang  $S_n$ , graph sapu  $B_{4,k}$ , graph cumi-cumi  $Sq_{4,n}$ , graph carterpillar,

graph cycle, graph super star graph  $(S_n, 3)$ . Selain itu Sevenhot juga membuktikan gabungan dari beberapa graph yakni, graf  $2S_n$ , graf  $S_n \cup S_{n+1}$ , graph  $S_n \cup B_{4,k}$ , graf  $S_n \cup Sq_{4,m}$  (Sevenhot, Sugeng, & Silaban, 2010).

Graph alfabet bintang merupakan graph yang dibangun dengan menggunakan huruf alfabet dan pada semua titik ujung diberikan graph bintang. Huda & Amri (2012) telah memperkenalkan graph H-Bintang dan A-Bintang. Kemudian huruf I,L,M,N,V,W dan huruf Z akan membentuk graf kartefilan beserta dengan variasinya, sedangkan huruf K dan X akan membentuk graf  $(S_n, 4)$  serta huruf T dan huruf Y sendiri membentuk graf  $(S_n, 3)$ . Untuk graph A-bintang perhatikan Gambar 1.



**Gambar 1. Graph A-bintang**

Dalam mempelajari pelabelan *graceful*, kemampuan pembuktian yang dimiliki mahasiswa sangatlah diperlukan. Kemampuan pembuktian dalam pelabelan *graceful* meliputi kemampuan memahami konsep, kemampuan dalam membuat label, kemampuan dalam membuat pola yang dituangkan dalam sebuah fungsi, dan kemampuan mengkonstruksi fungsi menjadi lebih sederhana. Tidak hanya kemampuan membuktikan saja dalam mempelajari pelabelan *graceful*, penalaran induktif dalam membentuk sebuah konjektur juga diperlukan. Oleh sebab itu, penelitian tentang kemampuan pembuktian ini dilakukan untuk mengetahui bagaimana kemampuan mahasiswa dalam membuktikan teorema pada pelabelan *graceful* pada graph A-Bintang, sehingga dapat menjadi acuan pembelajaran selanjutnya.

## 2. Metode

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode studi kasus dengan analisis kualitatif. Analisis kualitatif digunakan untuk mendeskripsikan kemampuan mahasiswa dalam membuktikan teorema pada pelabelan *graceful*



graph A-bintang. Sampel pada penelitian ini berjumlah 13 orang yang merupakan mahasiswa salah satu perguruan tinggi negeri di Bengkulu. Pada penelitian ini akan dibahas dalam 5 indikator kemampuan yakni: (1) Melabelkan verteks dan sisi; (2) Menggeneralisasi label verteks ke dalam fungsi  $f$ ; (3) menggeneralisasi label sisi ke dalam fungsi  $f'$ ; (4) Mereduksi fungsi menjadi lebih sederhana; (5) Menuliskan argument dalam pembuktian. Masing-masing indikator dibagi lagi ke dalam 5 kriteria yaitu kriteria A, B, C, D, dan E yang masing-masing diberikan keterangan sebagai berikut

- A: Jawaban lengkap dan tepat
- B: Jawaban tidak lengkap namun tepat
- C: Jawaban lengkap namun ada yang tidak tepat
- D: Jawaban tidak lengkap dan tidak tepat
- E: Tidak menjawab

### 3. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini dimulai dengan hasil jawaban yang telah dikerjakan oleh mahasiswa berdasarkan instrument yang diberikan.

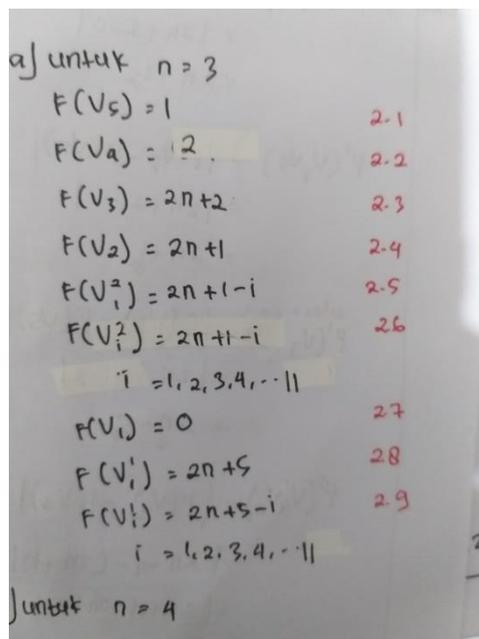
**Tabel 1. Hasil Jawaban Mahasiswa Berdasarkan Indikator Kemampuan**

<b>Indikator Kemampuan</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>E</b>
Melabelkan verteks dan sisi	3	0	0	2	8
Menggeneralisasi verteks ke dalam fungsi $f$	2	4	1	5	1
Menggeneralisasi sisi ke dalam fungsi $f'$ , dimana $f'(u, v) =  f(u) - f(v) $	2	4	1	5	1
Mereduksi fungsi menjadi lebih sederhana	6	0	1	5	1
Menuliskan argumen pada pembuktian	2	7	0	1	3

Berdasarkan Tabel 1, pada indikator melabelkan verteks dan sisi sebanyak 3 orang (23,08%) dengan kriteria A, 2 orang (15,38%) dengan kriteria D, dan 8 orang (61,54%) dengan kriteria E. Pada indikator menggeneralisasi verteks ke dalam fungsi  $f$  sebanyak 2 orang (15,38%) dengan kriteria A, 4 orang (30,77%) dengan kriteria B, 1 orang (7,69%) dengan kriteria C, 5 orang (38,46%) dengan kriteria D, dan 1 orang (7,69%) dengan kriteria E. Pada indikator menggeneralisasi sisi ke dalam fungsi  $f'$  sebanyak 2 orang (15,38%) dengan kriteria A, 4 orang (30,77%) dengan kriteria B, 1 orang (7,69%) dengan kriteria C, 5 orang (38,46%) dengan kriteria D, dan 1 orang (7,69%) dengan kriteria E. Pada indikator mereduksi fungsi menjadi lebih sederhana sebanyak 6 orang (46,15%), 1 orang (7,68%) dengan kategori C, 5 orang (38,66%) dengan kategori D, 1 orang (7,69%) dengan kategori E. Pada indikator menuliskan argument pada pembuktian sebanyak 2 orang (15,38%) dengan kriteria A, 7 orang (53,85%) dengan kriteria B, 1 orang (7,69%) dengan kategori D, dan 3 orang (23,08%) dengan kategori E. Pembahasan yang dilakukan hanya berfokus pada kategori B, C, dan D.



Pada Gambar 3, jawaban mahasiswa lengkap, namun ada yang kurang tepat. Hal ini tampak mahasiswa menuliskan fungsi  $f(u_i^2) = 2 - i$ . Nilai  $i = 1, 2, \dots, n$ , jika nilai  $i$  disubstitusikan ke hasil jawaban mahasiswa, maka nilainya akan banyak yang negatif. Mahasiswa pada kasus ini kurang berhati-hati dalam menjawabnya.

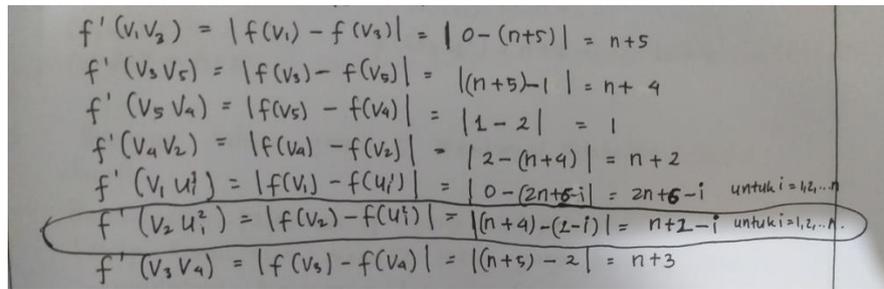


**Gambar 4. Jawaban mahasiswa pada indicator 2 dengan kriteria D**

Pada gambar 4, jawaban mahasiswa tidak lengkap dan tidak tepat. Hal ini dapat dilihat bahwa mahasiswa hanya menuliskan untuk  $n = 3$  saja. Jawaban yang diharapkan adalah mahasiswa mampu menggeneralisasi fungsi  $f$  sampai  $2n + 5$  verteks.

### 3. Menggeneralisasi sisi ke dalam fungsi $f'$

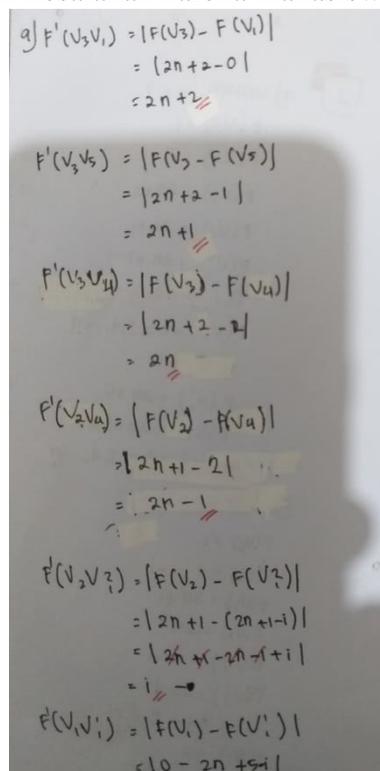
Pada bagian ini sesungguhnya merupakan lanjutan dari hasil pada indicator 2. Jika pada indicator 2 mahasiswa belum dapat menjawabnya dengan sempurna, maka pada indikator 3 ini mahasiswa juga belum dapat menjawabnya dengan sempurna. Berikut ini akan difokuskan pada penjelasan kriteria B, C, dan D.



$$\begin{aligned}
 f'(v_1 v_2) &= |f(v_1) - f(v_2)| = |0 - (n+5)| = n+5 \\
 f'(v_3 v_5) &= |f(v_3) - f(v_5)| = |(n+5) - 1| = n+4 \\
 f'(v_5 v_4) &= |f(v_5) - f(v_4)| = |1 - 2| = 1 \\
 f'(v_4 v_2) &= |f(v_4) - f(v_2)| = |2 - (n+4)| = n+2 \\
 f'(v_1 u_i^2) &= |f(v_1) - f(u_i^2)| = |0 - (2n+5-i)| = 2n+5-i \text{ untuk } i=1,2,\dots,n \\
 f'(v_2 u_i^2) &= |f(v_2) - f(u_i^2)| = |(n+4) - (2-i)| = n+2-i \text{ untuk } i=1,2,\dots,n \\
 f'(v_3 v_4) &= |f(v_3) - f(v_4)| = |(n+5) - 2| = n+3
 \end{aligned}$$

Gambar 5. Jawaban mahasiswa pada indikator 3 dengan kriteria C

Pada gambar 5, jawaban mahasiswa lengkap namun ada yang tidak tepat. Hal ini tampak pada fungsi  $f'(v_2 u_i^2) = |(n+4) - (2-i)| = n+2-i$ , harusnya hasil pada ruas kanan di perhitungan mahasiswa adalah  $n+2+i$ . Hasil akhirnya mengalami kesalahan karena mahasiswa kurang berhati-hati.



$$\begin{aligned}
 g) f'(v_3 v_i) &= |f(v_3) - f(v_i)| \\
 &= |2n+2-0| \\
 &= 2n+2 \\
 f'(v_3 v_5) &= |f(v_3) - f(v_5)| \\
 &= |2n+2-1| \\
 &= 2n+1 \\
 f'(v_3 v_4) &= |f(v_3) - f(v_4)| \\
 &= |2n+2-2| \\
 &= 2n \\
 f'(v_2 v_4) &= |f(v_2) - f(v_4)| \\
 &= |2n+1-2| \\
 &= 2n-1 \\
 f'(v_2 v_3) &= |f(v_2) - f(v_3)| \\
 &= |2n+1 - (2n+1)| \\
 &= |2n+1-2n-1+i| \\
 &= 1 \\
 f'(v_1 v_i) &= |f(v_1) - f(v_i)| \\
 &= |0 - 2n+5-i|
 \end{aligned}$$

Gambar 6. Jawaban mahasiswa pada indikator 3 dengan kategori D

Pada Gambar 6, jawaban mahasiswa tidak lengkap dan tidak tepat. Hal ini disebabkan mahasiswa hanya memberikan fungsi  $f$  pada pelabelan verteks dengan kasus tertentu yakni  $n = 3$ .

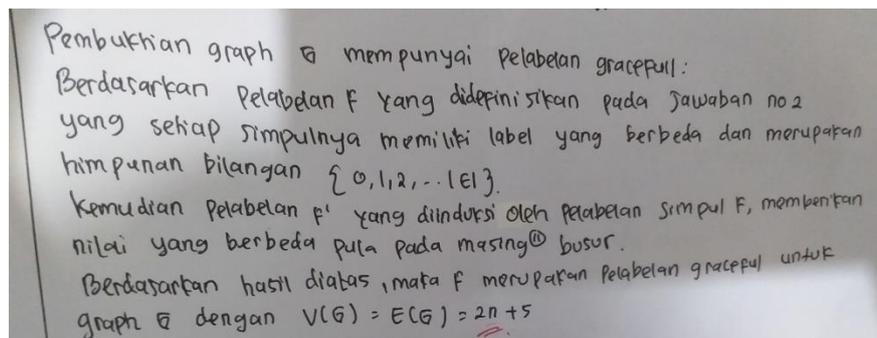
#### 4. Mereduksi fungsi menjadi lebih sederhana

Pada bagian ini, dapat dilihat bahwa pada gambar 3 dan 5, mahasiswa sudah lengkap melabelkan verteks dan sisi serta bentuk reduksinya juga sudah sederhana.

Namun karena ada satu kesalahan maka mahasiswa berkategori C. Pada gambar 4 dan 6 tampak mahasiswa belum dapat mereduksi fungsi menjadi lebih sederhana. Hal ini dikarenakan fungsi  $f$  yang dibuat tidak lengkap dan tidak tepat.

## 5. Menuliskan argumen pembuktian

Pada bagian ini akan diperlihatkan jawaban mahasiswa berdasarkan kriteria B dan D.



Gambar 7. Jawaban mahasiswa pada indikator 5 dengan kategori B

Pada Gambar 7, jawaban mahasiswa tampak tidak lengkap namun tepat. Hanya saja kurang merujuk pada persamaan-persamaan yang telah dibuat sebelumnya.

## 4. Simpulan dan Saran

### Simpulan

Dari hasil dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa pada indikator melabelkan verteks dan sisi sebanyak 3 orang (23,08%) dengan kriteria A, 2 orang (15,38%) dengan kriteria D, dan 8 orang (61,54%) dengan kriteria E. Pada indikator menggeneralisasi verteks ke dalam fungsi  $f$  sebanyak 2 orang (15,38%) dengan kriteria A, 4 orang (30,77%) dengan kriteria B, 1 orang (7,69%) dengan kriteria C, 5 orang (38,46%) dengan kriteria D, dan 1 orang (7,69%) dengan kriteria E. Pada indikator menggeneralisasi sisi ke dalam fungsi  $f'$  sebanyak 2 orang (15,38%) dengan kriteria A, 4 orang (30,77%) dengan kriteria B, 1 orang (7,69%) dengan kriteria C, 5 orang (38,46%) dengan kriteria D, dan 1 orang (7,69%) dengan kriteria E. Pada indikator mereduksi fungsi menjadi lebih sederhana sebanyak 6 orang (46,15%), 1 orang (7,68%) dengan kategori C, 5 orang (38,66%) dengan kategori D, 1 orang (7,69%) dengan kategori E. Pada indikator menuliskan argument pada pembuktian sebanyak 2 orang (15,38%) dengan kriteria A, 7 orang (53,85%) dengan kriteria B, 1 orang (7,69%) dengan kategori D, dan 3 orang (23,08%) dengan kategori E.

### Saran

Pada penelitian ini hanya membahas tentang pembuktian pelabelan *graceful* pada graph A-Bintang saja. Diharapkan untuk peneliti lain mengkaji pembuktian untuk kasus atau materi lain seperti analisis, ataupun aljabar.



## Daftar Pustaka

- Brualdi, R. A. (2010). *Introductory Combinatorics (Fifth Edition)*. China Machine Press, China.
- Huda, N., & Amri, Z. (2012). Pelabelan *Graceful*, *Scolem Graceful* Dan Pelabelan  $p$  Pada Graf H-Bintang Dan A-Bintang. *Jurnal Matematika Murni dan Terapan*, 6(2), 30-37
- Hodds, M., Alcock, L., & Inglis, M. (2014). Self-explanation training improves proof comprehension. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(1), 62–101.
- Kartika, E. D., & Yazidah, N. I. (2019). ANALISIS KEMAMPUAN PEMBUKTIAN MATEMATIS PADA MATAKULIAH ANALISIS REAL BERDASARKAN ADVERSITY QUOTIENT. *Prima: Jurnal Pendidikan Matematika*, 3(2), 152-157.
- Knuth, E.J. (2002). Theachers' Conception of Proof in the Context of Secondary School Mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education* 5: 61–88
- Maarif, S. 2015. *Pembelajaran Geometri Berbantuan Cabri 2 Plus (Panduan Praktis Mengembangkan Kemampuan Matematis)*. Bogor: In Media.
- Maarif, S, Perbowo, K. S., Noto, M. S., & Harisman, Y. (2019). Obstacles in Constructing Geometrical Proofs of Mathematics-Teacher-Students Based on Boero's Proving Model. *Journal of Physics: Conference Series*, 1315, 012043.
- Otten, S., Gilbertson, N. J., Males, L. M., & Clark, D. L. (2014). The Mathematical Nature of Reasoning-and-Proving Opportunities in Geometry Textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, 16(1), 51–79.
- Setiawan, Y. E. (2020). Analisis Kemampuan Siswa dalam Pembuktian Kesebangunan Dua Segitiga. *Al-Khwarizmi: Jurnal Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam*, Vol.8, No.1, hal.23-38
- Sevenhot, Sugeng.K.A., & Silaban, D.R., (2010). Pelabelan *Skolem Graceful* dan Pelabelan  $\rho$  Pada Gabungan Dua Graf. *Prosiding Seminar Nasional UNPAR*, Bandung, hal MS 183- MS 191
- Sudjana, N. & Ibrahim. (1992). *Penelitian dan Penilaian Pendidikan*. Bandung: Sinar Baru.
- Sundawana, M. D., Dewi, I. L. K., & Noto, M.S. (2018). Kajian Kesulitan Belajar Mahasiswa Dalam Kemampuan Pembuktian Matematis Ditinjau Dari Aspek Epistemologi Pada Mata Kuliah Geometri Transformasi. *INSPIRAMATIKA: Jurnal Inovasi Pendidikan dan Pembelajaran Matematika*. 4(1), 13-26