BEBERAPA DEKOMPOSISI GENETIK SISWA DALAM MEMAHAMI MATEMATIKA[1]

Wahyu Widada
Program Studi S-2 Pendidikan Matematika FKIP Universitas Bengkulu
Email: wahyu.unib@gmail.com

Abstrak

Dekomposisi genetik (atau model kognisi) adalah suatu kumpulan terstruktur dari aktivitas mental yang membangun blok (kategori-kategori) untuk mendeskripsikan bagaimana konsep/prinsip dapat dikembangkan dalam pikiran seorang individu. Berdasarkan analisis dekomposisi siswa SMP, temukan siswa yang mengalami kesalahan dalam pemanggilan kembali skema dari *long-term memory; ada* siswa yang nmengalami kesalahan pemahaman tentang konsep nilai tempat; adanya overgeneralisasi yang dilakukan oleh siswa SMP; dan ada siswa yang mampu memahami Sistem Persamaan Linier melalui proses matematisasi horizontal yang sangat baik.

Kata Kunci: Dekomposisi Genetik, Aktivitas Mental, Matematika SMP

1. PENDAHULUAN

Berbagai aktivitas mental dan fisik yang dilakukan oleh siswa dalam pembelajaran matematika dapat dipandang sebagai suatu kumpulan terstruktur atau model kognisi siswa tersebut. Model kognisi tersebut berupa aktivitas mental dan fisik yang membagun kategori-kategori yang dapat dieksplisitkan dalam bentuk deskripsi tentang bagaimana konsep/prinsip matematika dikembangkan dalam pikiran siswa. Kumpulan terstruktur ini kemudian disebut sebagai dekomposisi genetik (Dubinsky dan Yiparaki, 2001; Wahyu Widada, 2003). Untuk melakukan analisis dekomposisi genetik, peneliti harus mampu menelusuri secara mendalam aktivitas-aktivitas mental dan fisik seseorang sedemikian hingga secara terstruktur dapat diketegorisasikan dalam cuplikan-cuplikan yang bermakna. Kajian ini lebih banyak terkait dengan psikologi kognitif matematik. Berdasarkan beberapa literatur (seperti: Beddely, 1998; Davis & Tall, 1999; Hunt & Ellis, 1999; Solso, 1995), maka Wahyu Widada (2001, 2003) menyimpulkan bahwa konsentrasi dari psikolog dan peneliti inteligensi buatan (*Artificial Intelligence*, sebut saja dengan AI) adalah pada arsitektur kognitif atau sains kognitif (*cognitive science*). Peneliti AI ingin mengetahui bagaimana program komputer dapat mengerti dan berinteraksi dengan dunia luar. Sedangkan, psikolog mempelajari sistem pengetahuan tentang bagaimana pengetahuan disusun dalam pikiran manusia, bagaimana pengetahuan berkembang, dan bagaimana menggunakannya.

Perhatikan dekomposisi genetik tentang suatu *skema* tentang gradien garis singgung kurva yang dimiliki oleh seorang subjek M, seperti terlihat pada cuplikan interwiew (Wahyu Widada, 2001) berikut.

[1] Artikel disajikan dalam Seminar Nasional Bimbingan dan Konseling, FKIP Universitas Bengkulu 06 November 2013

M: Limit dari h'(x) untuk x mendekati nol adalah takhingga, menunjukkan bahwa gradien garis singgung kurva di titik nol menuju takhingga, yang berarti kurvanya sangat curam. …. karena h kontinu, dan h(0) = 2 , maka sketsa grafik melalui (0,2) dan curam ke kanan di sekitar x=0.

Pewawancara: Mengapa curam ke kanan?

M: …Grafik naik ke kanan, karena…h'(x) positif pada -2<x<3 dan cekung ke atas pada –2<x <0 karena h"(x) juga positif dan cekung ke bawah pada 0<x<5 karena h"(x) negatif.

Berdasarkan cuplikan di atas, dapat dikatakan bahwa seorang siswa (M) menunjukkan suatu tingkah laku *skema* tentang slope dengan mengaitkan sifat fungsi untuk turunan pertama dan turunan kedua yang dikoordinasikan dengan interval-interval yang berdekatan ataupun *overlap* (Wahyu Widada, 2003)

Seperti telah diungkap di atas, Dubinsky & Lewin (1986), Dubinsky (1987, 1989, 1995, 2000); dan Dubinsky & Yiparaki (2001), menulis teori tentang *action, process, object, and schema* (=APOS) sebagai suatu alat analisis yang digunakan untuk mendeskripsikan perkembangan *skema* seseorang pada suatu topik matematika yang merupakan totalitas dari pengetahuan yang terkait (secara sadar atau taksadar) untuk topik tersebut. *Perkembangan skema* merupakan suatu proses yang dimanis, dan selalu berubah. Pengetahuan tumbuh berdasarkan mekanisme tertentu dan meliputi tiga level (level intra, level inter, dan level trans), yang terjadi pada urutan tetap dan disebut dengan *triad* (Piaget & Garcia, 1989). Urutan tetap tersebut mengandung makna bahwa pelevelan *triad* adalah *hierarkis,* yakni level intra sebagai level terendah, level inter sebagai level menengah, dan level trans sebagai level tertinggi. Sifat yang lain dari pelevelan *triad* adalah *fungsional*, bukan struktural. Untuk itu, apabila seseorang dihadapkan pada suatu permasalahan, maka *skema* orang tersebut tidak harus berkembang mulai dari level terendah. Dan perkembangan *skema* yang digunakan untuk memecahkan permasalahan yang diberikan akan **dipetakan** ke salah satu level dari *triad*. Dalam hal ini, Piaget & Garcia juga menghipotesiskan bahwa level-level tersebut dapat ditemukan bila seseorang menganalisis suatu perkembangan *skema*. Misal seorang siswa dihadapkan pada permasalahan yang mengaitkan konsep turunan suatu fungsi. Siswa pada fase permulaan dari *triad*, yaitu level intra, dapat menginterpretasikan turunan sebagai slope dari garis tangen di titik tertentu, mendemonstrasikan interpretasi ini dengan fungsi naik/turun pada suatu interval, dan siswa tersebut mungkin juga dapat memecahkan permasalahan laju perubahan sesaat. Namun dia tidak dapat membuat hubungan antara dua hal tersebut. Sedangkan siswa pada level inter, dapat mengoordinasikan maksud dari turunan sebagai slope garis tangen dengan ide turunan sebagai laju perubahan sesaat di suatu titik yang diberikan. Siswa pada level trans dapat mencapai sifat-sifat global baru yang tidak dapat dicapai oleh level-level yang lain. Siswa tersebut dapat menggeneralisasi bahwa semua turunan sebagai slope atau laju perubahan sesaat dari suatu fungsi di suatu titik yang diberikan dan mereorganisasi semua situasi yang terkait dengan konsep turunan.

Dubinsky (2000), mengungkapkan bahwa APOS merupakan suatu teori dalam pembelajaran, karena memenuhi enam karakteristik teori pembelajaran. Keenam karakteristik tersebut adalah sebagai berikut.

1) *Mendukung Prediksi*. Kemampuan prediktif dari teori APOS berada pada pernyataan yang tegas, yaitu bila siswa membuat konstruksi mental tertentu, maka ia akan belajar topik matematika tertentu.
2) *Dapat Digunakan untuk Menjelaskan*. Teori APOS dapat digunakan untuk mendeskripsikan transkrip *interview* dalam rincian yang sangat baik. Teori APOS dapat juga digunakan untuk mencoba menemukan ide-ide matematika dan kemungkinan yang ada berupa performa siswa. Kemudian mencoba menemukan penjelasan dari perbedaan dalam istilah membangun atau tidak membangun *aksi* tertentu, *proses*, *objek* dan/atau *skema*. Teori APOS berupaya menjelaskan tentang keberhasilan dan kegagalan siswa.
3) *Dapat Diterapkan pada Fenomena yang Luas*. Teori APOS dapat diterapkan oleh pengembangnya dan juga oleh orang lain, untuk topik matematika yang lebih luas.
4) *Membantu Mengorganisasikan Pikiran tentang Fenomena Pembelajaran*. Teori APOS dapat digunakan untuk mengembangkan suatu dekomposisi genetik dari suatu konsep matematika sebagai satu cara mengorganisasikan pikiran seseorang tentang bagaimana ia dapat belajar tentang konsep tertentu.
5) *Sebagai Alat Analisis Data*. Suatu metode yang sangat khusus dalam menggunakan teori APOS untuk menganalisis data seperti yang telah disebutkan pada poin 2 di atas.
6) *Memberi suatu Istilah untuk Berkomunikasi dalam Pembelajaran*. Istilah-istilah seperti *aksi*, *proses*, *objek*, *skema*, interiorisasi, dan enkapsulasi sekarang digunakan dalam perkuliahan tentang pembelajaran matematika siswa.

Berdasarkan enam karakter di atas, maka teori APOS merupakan suatu teori konstruktivis tentang bagaimana kemungkinan berlangsungnya pencapaian/pembelajaran suatu konsep atau prinsip matematika. Hal ini didasarkan pada hipotesis tentang sifat pengetahuan matematika dan bagaimana pengetahuan tersebut dikembangkan. Untuk mengetahui proses kognitif siswa dalam aktivitas mental dan fisiknya dapat dilakukan analisa dekomposisi genetik

Berikut ini contoh analisis dekomposisi genetik untuk *perkembangan konsep keterbagian* guru pra-servis (hasil penelitian Zazkis & Campbell, 1996) sebagai berikut.

Aksi

Berpikir tentang keterbagian (*divisibility*) sebagai *aksi* dapat dicontohkan dalam kutipan wawancara berikut.

Pewawancara : Apakah ada bilangan antara 12358 dan 12368 yang habis dibagi 7?

Nicole : Saya akan mencobanya - untuk membagi semuannya - untuk meyakinkan. Bolehkah menggunakan kalkulator?

Pewawancara : Ya, boleh, tetapi sebentar. Sebelum kamu melakukan pembagian, apakah dugaanmu, apakah yang kamu perkirakan?

Nicole : Saya sungguh-sungguh tidak tahu. Jika ada 3 atau 9 saya dapat menjumlahkan digitnya. Tetapi untuk digit 7 kita tidak dapat seperti itu. Maka saya akan membagi semuannya.

(Nicole melakukan beberapa pembagian dengan 7 dari bilangan yang diberikan)

Nicole : Ya, ini ada satu, 12362 dibagi 7 adalah 1766. Tidak ada bagian desimal, jadi itulah bilangannya.

Pewawancara : Apakah kamu mengira ada bilangan lain dalam interval ini yang habis dibagi 7?

Nilcole: Saya akan menelitinya, saya tidak dapat melihat bagaimana pola itu terjadi, saya tidak tahu jalan termudah untuk dapat menemukan dengan tepat.

"Memeriksa" merupakan strategi pokok dan mungkin hanya strategi itu yang diketahui Nicole, sebab dia mengklaim bahwa "tidak tahu jalan termudah untuk dapat menemukan apa yang diminta".

Interiorisasi: Bentuk *aksi* pada *proses*

Interiorisasi merupakan perubahan dari suatu aktivitas prosedural untuk mampu melakukan kembali aktivitas dalam mengimajinasikan beberapa pengertian yang berpengaruh terhadap kondisi yang dihasilkan. Berikut contoh interiorisasi sebagai suatu *aksi* pada *proses*, yang mengilustrasikan pemahaman prosedural (*procedural understanding*) dari pembagian panjang.

Pewawancara : Apakah menurutmu ada bilangan antara 12358 dan 12368 yang habis dibagi 7?

Jane : Mari kita lihat (pada pembagian panjang) jika 12359 dibagi 7 sisanya 4, sehingga 60,61,62,…12362 habis dibagi 7.

Pewawancara : Ini sangat menarik, bagaimana kamu mengetahuinya? Saya tidak melihat kamu mengerjakannya.

Jane : Jika 12359 mempunyai sisa 4, maka bilangan berurutan berikutnya mempunyai sisa 5, selanjutnya 6, dan satu lagi 7, ini berarti sisanya 0, dengan kata lain tidak mempunyai sisa. Jadi, jika Anda membagi 12362 dengan 7 tidak bersisa, berarti bilangan tersebut habis dibagi.

Jane mendemonstrasikan pemahaman prosedural dengan menambahkan angka 1 pada sisa pembagian, begitu seterusnya, hal ini seperti modulo 7. Tetapi Jane masih belum dapat mengatakan bilangan tersebut sebelum benar-benar menemukannya.

***Proses* baru: koordinasi dan kebalikan**

Menurut kerangka APO *proses* keterbagian oleh 15 dapat diakibatkan dari koordinasi pembagian dengan 5 dan 3. Jika 3 dan 5 merupakan pembagi dari M, maka 15 juga pembagi M. Berikut merupakan kutipan tentang koordinasi.

Pewawancara : Bagaimana dengan 63?

Linda: Jika saya mengalikan seperti ini, 3x3 = 9, 9x7 = 63, maka saya yakin akan menjadi seperti itu.

Pewawancara : Mengapa kamu yakin?

Linda : Sebab ini mirip dengan, jika saya mengalikan 3 dengan 3, saya tahu dengan prinsip itu saya dapat mengalikan dengan 7, sebab semua itu perkalian, saya tidak dapat mengingat namanya.

Pewawancara : hm..hm

Linda: Jadi kamu mengalikan 3 dengan 3, dan kemudian mengalikannya dengan 7. Saya meninginkan 3^1 dan 5^2 di samping 63 untuk mendapatkan M.

Pewawancara : Bagaimana dengan 9?

Anita: Ya, kamu punya 3, 9 adalah 3^2. Kamu dapat membuat 9 dari 3^2.

Pewawancara: Bagaimana dengan 63?

Anita: Ya, 63 adalah 9x7, dan kamu mempunyai 7, dan kamu dapat membuat 9 dengan 3^2.

Linda secara mutlak menggambarkan M sebagai $63x(3^1x5^2)$. Linda tidak dapat mengingat nama, mungkin yang dimaksud adalah menggambarkan koordinasi dari komutatif dan assosiatif.

Enkapsulasi: *proses* pada *objek*

Berikut ini kutipan wawancara dengan Bob yang mencoba menerangkan pembagian M dengan 7 dan 5 dalam bentuk dekomposisi prima dari faktor-faktor M.

Pewawancara: Bob, bilangan M adalah 3^3x5^2x7, apakah M habis dibagi 7?

Bob : Ya

Pewawancara : Bagaimana penjelasannya?

Bob : 7 adalah faktor dari M, sehingga M habis dibagi 7.

Pewawancara : Bagaimana dengan 5?

Bob : Juga faktor dari M.

Pewawancara : Baik, apakah M habis dibagi 2?

Bob : Tidak, sebab 2 bukan faktor M.

Pewawancara : Mengapa kamu merasa bahwa itu benar?

Bob : M bukanlah kelipatan dari 2, sehingga tidak dapat dibagi 2.

…… ……… ………….

Bob : 2 adalah bilangan prima, bilangan prima 2 bukanlah solusinya, apapun hasil dari M, 2 bukanlah pembagi M.

Bob membuat hubungan yang penting berkenaan dengan hubungan antara faktor-faktor perkalian dan keterbagian, dia mempunyai pemahaman keterbagian yang enkapsulasi sebagai *objek*.

Tematisasi: dari *objek* ke skema

Tematisasi keterbagian merupakan suatu *skema* yang meliputi konstruksi khusus antara pembagian dan *objek* lain dari teori bilangan seperti bilangan prima, faktor dan beberapa konsep lain tentang bilangan bulat. Berikut ilustrasi bahwa Jane dapat mengoordinasikan keterbagian dari bilangan-bilangan prima dengan lancar dan menarik kesimpulan tentang kasus komposit.

Pewawancara : Dan apa yang dapat diperoleh dari 63?

Jane : 7 x 9 adalah 63.

Pewawancara : Kemudian apa yang dapat kamu kerjakan di sini? Coba jelaskan!

Jane : Saya bisa mendapatkan beberapa faktor, misalkan $3x3=3^2=9$, kemudian saya kalikan dengan 7 sehingga menghasilkan 63. Dan karena 3^2 dan 7 merupakan bagian dari faktorisasi prima, maka bilangan itu habis dibagi 63.

Jane mendemonstrasikan pemahamannya bahwa M tidak hanya habis dibagi oleh faktor primanya tetapi juga oleh hasil kali komposit dari faktor primanya. Pembuatan hubungan antara faktor dan dekomposisi prima dengan keterbagian tampak memberikan kontribusi besar pada tematisasi dari keterbagian. Dana mengilustrasikan dengan jelas tentang kekuatan tematisasi dari keterbagian seperti *skema* dengan menerapkan hubungan dekomposisi prima untuk menunjukkan keterbagian 391 oleh 26.

Pewawancara : Baiklah, apakah 391 habis dibagi 26?

Dana : (Diam sebentar) Tidak, karena 23 dan 17 keduanya bilangan prima. Tidak. Hanya ada 2 yang terkait dalamnya, hanya 23 kali 17.

Hal ini menunjukkan bahwa tematisasi dari *skema* dapat menjangkau dan dapat mengatasi permasalahan lain yang terjadi. Di lain pihak Pam, salah seorang partisipan, menunjukkan kedalaman *skema*nya tentang keterbagian dihubungkan dengan struktur pembagian, perkalian, dan pengertian distribusi modular, dalam salah satu wawancara Pam mengungkapkan bahwa bila ia diberikan 7 bilangan berurutan, pasti ada satu yang habis dibagi 7.

Berikut ini adalah contoh analisis dekomposisi genetik untuk *perkembangan skema* mensketsa grafik fungsi nonrutin, dari beberapa cuplikan wawancara dalam penelitian Baker, Cooley, & Trigueros (2000).

Aksi

Salah satu *aksi* Siswa dalam menyelesaikan permasalahan sketsa grafik fungsi nonrutin adalah sebagai berikut.

Pewawancara : Okey! Sekarang limit untuk x mendekati 0 dari h'(x) adalah infinit. Apa maksudnya?

Siswa 1 : Baik, saya dapat mencoba mensketsa grafik di sekitar x=0, oleh karena itu slope di titik tersebut menuju takhingga…

Interiorisasi: Bentuk *aksi* pada *proses*

Berikut contoh suatu *aksi* yang berbentuk *proses*, yang mengilustrasikan pemahaman prosedural.

Siswa 2 : Saya berpikir bahwa pada $-4<x<-2$, h'(x) positif dan h''(x) negatif, berarti pada interval tersebut h naik dan cekung ke bawah.

Enkapsulasi: *Proses* pada suatu *objek*

Enkapsulasi tentang titik belok di x=-2 ditunjukkan oleh Siswa 3 yang mulai mem-bedakan konsep titik stasioner dengan pemahaman prosedural.

Pewawancara : Bagaimana kondisi grafik di sekitar x=-2?

Siswa 3 : Pada interval $-4<x<-2$ turunan pertama positif [$h'(x)>0$] berarti h naik, dan [$h''(x) <0$] berarti h cekung ke bawah, begitu juga pada $-2<x<3$ [h naik], dan $h''(x)>0$ pada $-2<x<0$ [h cekung ke atas]. Dan karena h'(-2)=0, maka di x=-2 merupakan titik belok.

Tematisasi: dari *objek* ke skema

Siswa 4 menunjukkan suatu *skema* terhadap slope dengan mengaitkan sifat fungsi dengan turunan pertama dan kedua yang dikoordinasikan dengan interval-interval yang berdekatan.

Siswa 4 : Limit dari h'(x) menunjukkan bahwa slope dari fungsi di titik nol menuju takhingga, yang berarti slopenya sangat curam. h kontinu, sehingga sketsa grafik curam ke kanan di $x=0$.

Pewawancara : Mengapa curam ke kanan?

Siswa 4 : Anda dapat melihat bahwa h'(x) positif pada $-2<x<3$ dan cekung ke atas pada $-2<x<0$ karena h''(x) positif dan cekung ke bawah pada $0<x<5$ karena h''(x) negatif.

Berdasarkan uraian di atas, dapat disintesis bahwa keterkaitan antara aksi-proses-objek-*skema*. Keterkaitan tersebut adalah sebagai berikut, pemahaman suatu konsep atau prinsip matematika dimulai dengan memanipulasi objek-objek fisik atau objek-objek mental yang telah dikonstruksi sebelumnya untuk membentuk *aksi-aksi*; *aksi-aksi* kemudian *diinteriorisasi* untuk membentuk *proses-proses* yang kemudian *dienkapsulasi* untuk membangun suatu *objek*. *Objek* tersebut dapat *dideenkapsulasi* untuk membentuk proses-proses. Peristiwa kognitif berupa *interiorisasi* sebagai suatu aktivitas pada suatu *proses*, meng*enkapsulasi* suatu *proses* pada *objek*, atau tematisasi suatu *skema*, dapat dijelaskan dengan baik dalam kerangka teori APOS. Perbedaan antara *aksi* dan *proses* ditunjukkan oleh suatu *aktivitas prosedural* atau suatu *pemahaman prosedural*. Sedangkan perbedaan antara *proses* dan *objek* ditunjukkan oleh suatu *pemahaman prosedural* dan *pemahaman konseptual*. Akhirnya, *proses-proses* dan *objek-objek* dapat diorganisasikan dalam suatu *skema*. Semua aktivitas mental dan fisik ini dapat dikumpulkan secara terstruktur berupa dekomposisi genetik.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini adalah penelitian eksploratif, yang berpusat pada *interview* berbasis tugas (*the task-based interview*) (Davis, 1984; Goldin, 1998; Thomas, Mulligan & Goldin, 2002; Tsamir & Dreyfus, 2002; Wahyu Widada, 2003). Penelitian eksploratif ini sebagai suatu prosedur untuk mengungkap hakikat dari gejala-gejala yang muncul dari subjek penelitian. Hakikat yang ditemukan akan digunakan untuk *menguji kebenaran* secara empirik tentang dekomposisi genetik siswa SMP dalam merespon suatu soal atau masalah matematika. Hakikat tersebut ditelusuri melalui suatu *intervew berbasis tugas* kepada setiap subjek. Dalam *interview* ini, peneliti sebagai *interviewer* bertindak sebagai *observer netral*, yang bertujuan agar Siswa (subjek) dapat mengungkapkan proses berpikir dengan jelas dan tidak diragukan lagi, dengan meminimalkan adanya kontaminasi atau pengaruh dari pikiran *interviewer*.

Dalam menganalisis hasil *interview*, terlebih dahulu dideskripsikan tentang konstruksi mental tertentu dari Siswa yang digunakan untuk mengembangkan pengertiannya tentang teknik mensketsa grafik fungsi dan teknik menentukan konvergensi barisan dan deret takhingga. Analisis yang digunakan adalah *analisis dekomposisi genetik.* Analisis dekomposisi genetik (atau model kognisi) (Dubinsky & Yiparaki, 2001), adalah suatu analisis tentang kumpulan terstruktur dari aktivitas mental yang membangun blok (kategori-kategori) untuk mendeskripsikan bagaimana konsep/prinsip dapat dikembangkan dalam pikiran seorang individu. Konstruksi mental tersebut adalah *aksi*, *proses*, *objek*, dan *skema* yang merupakan *kerangka kerja* teoretis dari teori APOS. Seperti diungkapkan oleh Dubinsky &

McDonald (2000), bahwa teori APOS dapat digunakan secara langsung dalam menganalisis data tentang tingkah laku *skema* seseorang. Peneliti dapat membandingkan keberhasilan atau kagagalan subjek untuk suatu tugas matematika melalui konstruksi mental tertentu yang mungkin atau tidak mungkin mereka lakukan. Setelah lengkap dekomposisi genetik awal, maka secara ekstensif dianalisis kembali untuk merevisi dekomposisi genetik yang telah dideskripsikan sebelumnya agar lebih teliti dalam merefleksi data.

3. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan data hasil penelitian dilakukan analisis hal-hal yang menarik. *Hal-hal yang menarik* tersebut meliputi, konsepsi subjek, dan area masalah yang dialami subjek. Konsepsi subjek berupa tafsiran-tafsiran yang dilakukan subjek terhadap permasalahan yang diberikan sesuai dengan ide-ide yang ada dalam pikirannya, dan teknik-teknik yang digunakan subjek untuk menyelesaikan masalah yang diberikan tersebut. Sedangkan area masalah yang dimaksud dalam hal ini adalah bentuk kesalahan yang dilakukan subjek. Bentuk kesalahan yang dilakukan subjek meliputi pertama kesalahan nonsistematis atau acak, kedua kesalahan sistematis, konsisten, atau berpola, dan ketiga salah hafal (yakni salah karena lupa, atau salah karena tidak tahu).

Kesalahan yang dilakukan oleh subjek sering terkait dengan kerangka kerja konseptual, sebab informasi yang datang akan disimpan dalam memori sebagai suatu jaringan kerja yang terorganisasi dan saling terkait sebagai suatu kerangka kerja konseptual. Setiap kerangka kerja konseptual yang dimiliki seseorang merupakan suatu ide yang bersifat personal dan *idiosyncratic*, dan merupakan refleksi dari penjelasan seseorang tentang konsep. Dan kerangka kerja konseptual seseorang menentukan bagaimana informasi baru akan dikode. Suatu kerangka kerja yang sederhana menyimpan informasi yang terbatas, dan memiliki banyak keterbatasan, sedangkan kerangka kerja yang kompleks mempunyai banyak *channel* yang cukup untuk menghubungkan informasi baru, sehingga menghasilkan informasi lebih banyak yang disimpan dalam memori. Dengan demikian subjek dikatakan *tidak memiliki pemahaman secara konseptual* bila dalam menyelesaikan masalah tidak memanfaatkan konsep-konsep yang telah dipelajari tanpa alasan yang logis, atau memanfaatkan beberapa konsep yang terkait tetapi gagal dalam implementasinya, atau terjadi miskonsepsi dan kesalahan deskripsi tentang konsep-konsep terkait dengan penyelesaian masalah yang diberikan.

Berikut ini beberapa hasil analisis dekomposisi genetik siswa sebagai bagian dari penelitian pengembangan teori tentang *extended triad++* (Wahyu Widada, 2010) yang dapat disajikan dalam paparan sebagai berikut.

a. Kesalahan dalam pemanggilan kembali skema dari *long-term memory*

Kesalahan siswa dalam pemanggilan kembali skema dari *long-term memory* (LTM) sering terjadi dalam proses belajar matematika. Salah satu contoh adalah ketika guru memberikan stimulus awal berupa pertanyaan “berapa 4x4?”. Dalam beberapa kejadian, sebenarnya *working memory* siswa telah melaksanakan tugasnya dengan baik, namun berikut ini cuplikan wawancara peneliti dengan salah seorang siswa.

Peneliti : Berapa 4x4?

Siswa : *[dengan cepat siswa menjawab]* ***... ya saya tahu Pak ... empat kali empat adalah delapan.***
Peneliti : Oke baiklah ... kalau begitu berapa 4+4 nak?
Siswa : Ooo ... maaf Pak yang tadi tu jawabnya enam belas.

Berdasarkan cuplikan wawancara di atas, dapat petik bahwa sebenarnya siswa telah memiliki skema yang tersimpan dalam LTM terutama dalam memori semantik tentang "4x4". Selain itu, cuplikan tersebut juga menandakan bahwa fakta berupa tanda operasi biner(+ dan x) telah melekat dan memiliki kesan yang kuat dalam diri siswa (lih. Davis 1984). Ketika terjadi kesalahan dalam pemanggilan kembali skema operasi biner perkalian, kemudian peneliti men-*trigger* dengan pertanyaan selanjutnya, siswa bukan menjawab *trigger* tersebut namun memperbaiki jawaban dari pertanyaan utama. Cuplikan ini juga dapat memberikan pesan bahwa biner penjumlahan kuat melekat dalam sistem memori siswa bila dibandingkan dengan operasi biner perkalian, sedemikian hingga siswa memberikan persepsi simbol perkalian dengan penjumlahan. Untuk mengatasi kesalahan ini, maka salah satu teknik pembelajaran deklaratif untuk memantapkan pemahaman siswa tentang fakta-fakta dalam matematika terutama simbol-simbol operasi hitung, dan dilanjutkan dengan teknik pembelajaran empiristik dan mekanistik untuk operasi hitung itu sendiri.

b. Kesalahan pemahaman siswa tentang konsep nilai tempat

Kejadian ini diperoleh ketika peneliti memberikan pertanyaan tentang pembagian dua bilangan bulat. Dalam merespon pertanyaan tersebut, terjadi kesalahan siswa berupa salah konsep nilai tempat. Berikut ini cuplikan wawancara dengan siswa yang mengalami kesalahan konsep nilai tempat tersebut.

Peneliti : Amir berapa $\frac{35}{5}$***?***
Amir : ... hasilnya adalah 3 Pak....
..
Peneliti : [peneliti sejenak menunggu Amir berpikir kembali]... Coba Amir jelaskan kepada saya, mengapa hasilnya 3?
Amir : ... begini Pak $\frac{35}{5}$ ***dicoret limanya dan sisanya tinggal 3.***
Peneliti : ... Oke ... baik, tapi Bapak ingin tahu alasan Amir mencoret lima?
Amir : ...saya ingat penjelasan Bu Tuty kalo $\frac{ab}{b}$ ***= a, karena dicoret b-nya...***

Cuplikan wawancara ini mengisyaratkan bahwa siswa mengalami kesalahan konsep nilai tempat 35 = ab, dengan a = 3 dan b = 5. Padahal, semestinya ab merupakan perkalian dua bilangan yang tidak sama dengan makna 35. Karena 35 bermakna 3 adalah puluhan dan lima adalah satuan. Kesalahan konsep nilai tempat ini berakibat terjadinya kesalahan prinsip tentang pembagian dua bilangan bulat, sehingga Amir menyimpulkan "$\frac{ab}{b}$ ***= a, karena dicoret b-nya..."*** Hal ini juga memperlihatkan betapa kuatnya skema tentang hukum kanslasi sebagai prinsip pencoretan dalam operasi biner pembagian yang tersimpan dalam memori sematik siswa bila dibandingkan dengan konsep nilai tempat. Untuk mengatasi kesalahan ini, maka salah teknik pembelajaran yang dapat diberikan kepada siswa adalah teknik pembelajaran tentang nilai tempat dengan menggunakan Media Blok Dienes.

c. Adanya overgeneralisasi yang dilakukan oleh siswa SMP

Overgeneralisasi pernah dialami oleh seorang siswa SMP, terutama dalam memfaktorkan persamaan kuadrat. Memori semantik siswa telah menyimpan skema dalam sebuah neuron-nya tentang prinsip memfaktorkan persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$. Overgeneralisasi seorang siswa dapat diungkapkan melalui cuplikan wawancara sebagai berikut.

Pewawancara : Mas coba Apakah Kamu tahu bagaimana cara menyelesaikan persamaan berikut ini $x^2 - 3x + 2 = 0$?

Siswa : ... dari guru saya Pak... persamaan kuadrat itu dapat diselesaikan dengan memfaktorkannya...

.... *[Siswa dapat memfaktorkan persamaan kuadrat tersebut dengan benar]***.....**

Pewawancara : ... Oke ... baik sekali. Kalo begitu coba coba Kamu selesaikan Persamaan Kuadrat $x^2 - 3x + 2 = 20$?

.... *[Siswa mengerjakan di atas kertas dalam waktu tertentu]***..................**

Pewawancara : ... bagaimana hasilnya?

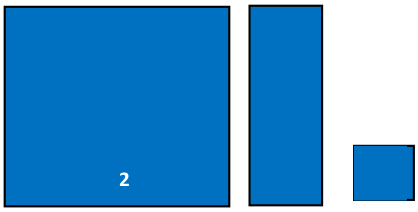
Siswa : Begini Pak.... Persamaan Kuadrat $x^2 - 3x + 2 = 20$, dapat diselesaikan dengan memfaktorkan yang sebelah kiri sehingga diperoleh: (x-2)(x-1) = 20, berarti ekuivalen dengan x-2 = 20 atau x-1 = 20, berarti penyelesaiannya adalah x = 22 atau x = 21 dan selesai Pak.

Pewawancara : ... baiklah,... kalau begitu tahukan Anda apa yang dimaksud persamaan kuadrat itu?

Siswa : Setahu saya bu Guru menuliskan $ax^2 + bx + c = 0$ adalah persamaan kuadrat, begitu Pak definisinya.

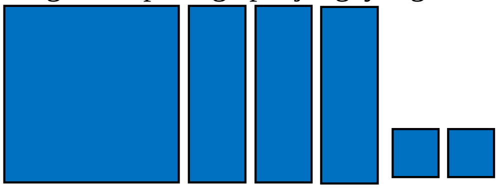
Cuplikan ini adalah suatu dekomposisi genetik siswa tentang kumpulan aktivitas terstruktur siswa dalam memahami prinsip memfaktorkan suatu persamaan kuadrat. Overgeneralisasi terjadi ketika siswa diminta menyelesaikan persamaan kuadrat $x^2 - 3x + 2 = 20$, tanpa menggunakan konsep persamaan kuadrat siswa langsung menfaktorkan persamaan tersebut. Dalam cuplikan ini memperlihatkan bahwa siswa hanya hafal definisi dari persamaan kuadrat, namun pemahaman akan definisi tersebut hanya sebagai kalimat deklaratif yang kurang bermakna bagi siswa tersebut. Sehingga siswa mengatakan bahwa: "***persamaan kuadrat $x^2 - 3x + 2 = 20$, dapat diselesaikan dengan memfaktorkan yang sebelah kiri sehingga diperoleh: (x-2)(x-1) = 20, berarti ekuivalen dengan x-2 = 20 atau x-1 = 20, berarti penyelesaiannya adalah x = 22 atau x = 21 dan selesai Pak."*** Jika siswa benar-benar memahami konsep persamaan kuadrat, maka siswa akan mengembalikan dulu sesuai dengan definisi persamaan kuadrat, sehingga persamaan $x^2 - 3x + 2 = 20$ dapat dibentuk dalam persamaan kuadrat menjadi $x^2 - 3x - 18 = 0$. Persamaan kuadrat $x^2 - 3x - 18 = 0$ inilah yang dapat diselesaikan dengan menfaktorkan menjadi $(x-6)(x+3) = 0$, sehingga diperoleh $x-6 = 0$ atau $x+3 = 0$ dan penyelesaiannya adalah $x = 6$ atau $x = -3$. Overgeneralisasi tentang persamaan kuadrat ini dapat diatasi dengan teknik pembelajaran melalui pemanfaatan media luasan dari daerah persegi dan persegi panjang.

Teknik pembelajaran melalui pemanfaatan media luasan dari daerah persegi dan persegi panjang, secara singkat dapat dipaparkan sebagai berikut. Pada mulanya siswa diminta membuat persegi dan persegi panjang dan diingatkan dengan luas daerah persegi dan persegi panjang tersebut seperti gambar berikut.



Gambar 1 Luas Daerah Persegi dan Persegi Panjang

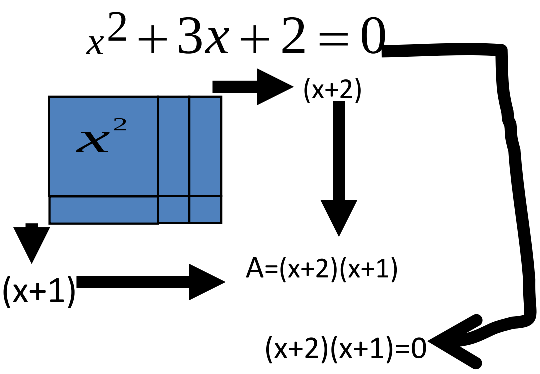
Berdasarkan luasan daerah di atas, kemudian siswa diminta mengelompokkan persegi dan persegi panjang yang ekuivalen dengan luas daerahnya ruas kiri dari persamaan kuadrat $x^2+3x+2 = 0$. Siswa kemudian mengelompokkan persegi dan persegi panjang yang ekuivalen dengan x^2+3x+2



Gambar 2 Persegi dan Persegi Panjang yang ekuivalen dengan x^2+3x+2

sebagai berikut.

Siswa kemudian diminta untuk menyusun persegi dan persegi panjang dari Gambar 2, menjadi persegi atau persegi panjang baru sedemikian hingga siswa dapat menentukan luas dari persegi atau persegi panjang baru tersebut. Ternyata siswa dapat menyusunya sebagai berikut.



Gambar 3 Luas Daerah Persegi Panjang Baru Ekuivalen dengan (x+2)(x+1)

Berdasarkan teknik pembelajaran di atas, maka siswa tidak sekedar di-*cekoki* prinsip memfaktorkan, namun siswa melalui aktivitas fisik dan mentalnya dapat menemukan sendiri prinsip tersebut. Teknik pembelajaran ini dilanjutkan terus hingga siswa mampu memperoleh pemahaman yang kuat tentang konsep dan prinsip persamaan kuadrat.

d. Pemahaman tentang Sistem Persamaan Linier

Dalam pembelajaran sistem persamaan linier dua variabel (SPLDV) di SMP, guru sering menyampaikannya dengan pendekatan strukturalistik. Guru memberikan definisi tentang SPLDV kemudian memberikan contoh dan dilanjutkan dengan latihan. Namun ada sebagian guru yang menyajikan SPLDV melalui pembelajaran yang lebih dekat dengan skema dasar siswa. Berdasarkan guru yang kedua ini, diperoleh dekomposisi genetik yang ada dalam sistem memori siswa adalah sebagai berikut.

Guru* : [*siswa tanpa diberikan konsep awal*]...*Coba Kamu selesaikan soal tentang "Makan di Kantin" berikut ini.

[Guru Memberikan Lembar Aktivitas Siswa (LAS) yang isinya sebagai berikut.]

Gambar 4. Masalah Makan di Kantin dalam LAS I

[.... sekitar 15 menit siswa diberi waktu menyelesesaikan soal LAS I...]

***Siswa* : *Pak saya akan coba menjawabnya ... ini jawaba saya Pak...* [*siswa memberikan jawaban di LAS I sebagaimana Gambar 5*]**

Gambar 5. Salah Satu Model Jawaban Siswa dari Masalah Makan di Kantin dalam LAS I

Siswa : .... jawaban saya dalam LAS I [*sebagaimana Gambar 5 di atas****] dua item yaitu satu bakso dan satu es campur berharga sama yaitu 13 ribu rupiah... saya bisa hilangkan dan hasilnya sebagai berikut. [siswa menunjuk penyelesaian seperti Gambar 6 berikut ini] .... berarti satu mangkok bakso harganya Rp 8.000.***

Rp 8.000,-

Gambar 6. Jawaban siswa setelah menghilangkan yang sama

Siswa : ... Pak selanjutnya saya bisa menggantikan harga satu mangkok bakso ke salah satu gambar... [*siswa menunjuk dalam jawabannya di LAS I sebagaimana Gambar 7****]***

Rp 8.000,- **Rp 5.000,-**

Rp 13.000,-

Gambar 7. Siswa Menggantikan Rp 8.000 untuk Bakso

Siswa : Karena 1 mangkok bakso saya ganti dengan Rp 8.000 dan keseluruhannya Rp13.000 berarti satu gelas es-nya lima ribu rupiah Pak.

Berdasarkan dekomposisi genetik siswa tentang SPLDV di atas, memperlihatkan bahwa siswa yang diberikan LAS berdasarkan masalah yang dekat dengan pikirannya sangat lancar dan sangat baik memanfaatkan *previous schema*-nya dalam sistem pemrosesan informasinya. *Short-term Memory* sebagai *working memory* bekerja begitu baik sebagai melakukan proses berdasarkan prosedur yang telah dia miliki.

Kutipan di atas mengisyaratkan bahwa aktivitas aksi-aksi terhadap objek-objek fisik dan metal dapat dienkapsulasi, diproses melalui interiorisasi dan ditematisasi menjadi skema yang matang tentang eleminasi dan substitusi SPLDV tanpa harus disampaikan dulu fakta tentang eleminasi, dan substitusi serta prinsip-prinsipnya. Namun dalam dekomposisi genetik tersebut justru siswa menemukan sendiri prinsip eleminasi sesuai dengan ungkapannya: "***.... jawaban saya dalam LAS I [****sebagaimana Gambar 5 di atas****] dua item yaitu satu bakso dan satu es campur berharga sama yaitu 13 ribu rupiah... saya bisa hilangkan dan hasilnya sebagai berikut. [siswa menunjuk penyelesaian seperti Gambar 6 berikut ini] .... berarti***

satu mangkok bakso harganya Rp 8.000." Kata "...menghilangkan ..." dalam ungkapan tersebut kebermaknaan prinsip eleminasi. Dalam hal ini siswa telah memiliki pemahaman yang tersimpan dalam skema tentang eleminasi secara baik dalam sistem memorinya meskipun nama prinsip ("eleminasi") tersebut belum dia ketahui, begitu pula prinsip substitusi-oun telah siswa pahami dengan baik dalam sistem memorinya.

4. SIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan analisis dekomposisi dalam uraian di atas, maka dapat disimpulkan sebagai berikut.

1) Ada siswa yang mengalami kesalahan dalam pemanggilan kembali skema dari *long-term memory*.
2) Ditemukan siswa yang nmengalami kesalahan pemahaman tentang konsep nilai tempat.
3) Adanya overgeneralisasi yang dilakukan oleh siswa SMP.
4) Ditemukan siswa yang mampu memahami Sistem Persamaan Linier melalui proses matematisasi horizontal yang sangat baik.

Berdasarkan simpulan di atas, maka disarankan kepada para guru, pengembang pembelajaran dan peneliti pendidikan matematika untuk dapat menindaklanjuti dalam pembelajaran matematika berupa pengembangan model pembelajaran yang dapat mengatasi kesalahan-kesalahan siswa, dan pengembangkan perangkat pembelajaran sesuai dengan prototipe yang dilakukan siswa dalam melakukan proses matematisasi Sistem Persamaan Liner Dua Variavel, serta para peneliti diharapkan dapat mengembangan teori tentang model mental siswa dalam belajar matematika.

DAFTAR PUSTAKA

Baker, Bernadette; Cooley, Laurel; & Trigueros, Maria. 2000. *A Calculus Graphing Schema*. Journal for Research in Mathematical Education. Vol. 31, No. 5

Baddely, Alan. 1998. *Your Memory A User's Guide*. London: Prion

Davis, Gary E. & Tall, David O. 1999. *What is a scheme*? http://www.cs.gsu.edu/~rumec/schemes.htm

Davis, Robert. 1984. *Learning Mathematics, The Cognitive Science Approach to Mathematics Education*. London & Sidney: Croom Helm

Dubinsky, E. 2000. *Using a Theory of Learning in College Mathematics Course.* Newsletter No. 12 *http:/www.bham.ac.uk/ctimath/talum12.htm or http:/www.telri.ac.uk/*

Dubinsky, E. & McDonald, Michael A. 2000. APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. *http:/www.telri.ac.uk/CM/Paper.pdf*

Dubinsky, E; & Yiparaki, Olga. 2001. *Predicate Calculus and the Mathematical Thinking of Student*. http://www.cs.cornell.edu/info/people/gies/symposium/dubinsky.htm

Dubinsky, E. 1995. *ISELT: A Programming Language for Learning Mathematics*. Communications on Pure and Applied Mathematics. Vol. XLVIII

Dubinsky, E. 1987. *Teaching Mathematical Induction*. Journal Mathematical Behavior. Vol. 6 No. 1 http: www.sciencedirect/science/journal/

Dubinsky, E. & Lewin,P. 1986. *Reflective abstraction and Mathematical Induction: The Decomposition of Induction and Compactness*. Journal Mathematical Behavior. Vol. 5 http: www.sciencedirect/science/journal/

Dubinsky, E. 1989. *On Teaching Mathematical Induction II*. Journal Mathematical Behavior. Vol. 8 http: www.sciencedirect/science/journal/

Goldin, G.A. 1998. *Observing Mathematical Problem Solving Through Task-based Interviews.* In: A.Teppo (Ed.) Qualitative Research Methods in Mathematics Education. Monograph No. 9 Journal for Research in Mathematical Education (JRME).

Hunt, R. Reed & Ellis, Henry C. 1999. *Fundamental of Cognitive Psychology*. Sixth Edition. Boston:McGraw-Hill College.

Piaget, J, & Garcia, R. 1989. *Psychologies and the History of Science* http://www.piaget.org/

Solso, R.L. 1995. *Cognitive Psychology*. Boston: Allyn and Bacon.

Thomas, Noel D; Mulligan, Joanne T.; & Goldin, Garall. 2002. *Children's Representasion and Structural Development of Counting Sequence 1-100*. In The Journal of Mathematical Behavior. Vol. 21, Issue 1 http://www.sciencedirect/Science/Juornal/07323123

Tsamir, Pessia & Dreyfus, Tommy. 2002. *Comparing Infinite Sets - a process of abstraction. TheCase of Ben*. In The Journal of Mathematical Behavior. Vol. 21, Issue 1 http://www.sciencedirect/Science/Juornal/07323123

Wahyu Widada. 2010. Pengembangan Lanjutan Teori dan Model Pembelajaran Teori Graph Berbasis ***Extended* Level Triad++** untuk Siswa FKIP Universitas Bengkulu. Lemlit. Unib: Laporan Penelitian Hibah Kompetensi Ditjen Dikti Kemdiknas.

Wahyu Widada. 2001. *Struktur Representasi Pengetahuan Siswa tentang Grafik Fungsi dan Deret Tak hingga*. Artikel disajikan dalam Seminar Nasional Matematika II FMIPA UNNES Semarang 27 Agustus 2001.

Wahyu Widada. 2003. *Interaksi Skema Siswa Model Baru tentang Permasalahan Grafik Fungsi pada Kalkulus*. Laporan Penelitian Mandiri:Tidak dipublikasikan

Zaskis, Rina & Campbell, Stephen. 1996. *Divisibility and Multiplicative Structure of Natural Numbers: Preservice Teachers' Understanding.* Journal for Research in Mathematice Education Vol. 27 No. 5.