e-ISSN: 2775-5894

Newton-Maxwell Journal of Physics

Journal Homepage https://www.ejournal.unib.ac.id/index.php/nmj

Visualisasi Rapat Peluang Posisi Elektron terhadap Sudut pada Atom Deuterium

Siti Afidatul Karomah*, Arihna Roihatul Jannah, Naila Rohmatal Aini, Rofi Zumarotin, Winungsih, Nani Sunarmi

Tadris Fisika, Universitas Islam Negeri Sayyid Ali Rahmatullah Tulungagung, Indonesia

ARTICLE INFO

Riwayat Artikel:

Draft diterima: 30 Agustus 2021

Revisi diterima: 07 Oktober 2021

Diterima: 19 Oktober 2021

Tersedia Online: 30 Oktober 2021

Corresponding author:

sitiafidatul1999@gmail.com

ABSTRAK

Deuterium merupakan salah satu isotop hidrogen yang memiliki satu proton dan neutron didalam inti dan satu elektron di kulit atom. Persamaan Schrodinger atom deuterium ditinjau dalam koordinat bola untuk memperoleh penyelesaian fungsi gelombang. Hasil akhir yang diinginkan dalam penelitian ini adalah memperoleh visualisasi kebergantungan rapat peluang posisi elektron terhadap sudut dengan menggunakan pemrograman Matlab yang berdasarkan penyelesaian fungsi gelombang bagian sudut atom deuterium. Penyelesaian fungsi gelombang sudut diperoleh dengan memisahkan persamaan Schrodinger kedalam fungsi bagian radial dan bagian sudut sehingga diperoleh penyelesaian persamaan Schrodinger orde dua bagian sudut yang memiliki solusi Polinomial Legendre jenis pertama serta melakukan visualisasi menggunakan Matlab. Hasil analisis menunjukkan kebergantungan rapat peluang posisi elektron hanya dipengaruhi oleh bagian sudut zenithal dan tidak dipengaruhi oleh bagian sudut azimuthal.

Kata Kunci: Deuterium, Gelombang Sudut, Visualisasi.

ABSTRACT

Deuterium is an isotope of hydrogen which has one proton and neutron in the nucleus and one electron in the atomic shell. The Schrodinger equation for the deuterium atom is examined in spherical coordinates to obtain the solution to the wave function. The final result desired in this study is to obtain a visualization of the probability density dependence of the electron position with respect to the angle by using Matlab programming which is based on the completion of the wave function of the deuterium atomic angle. The solution of the angular wave function is obtained by separating the Schrodinger equation into the function of the radial part and the angular part so that the solution of the second-order Schrodinger equation of the angular part which has a Legendre Polynomial solution of the first type is obtained and visualizes using Matlab. The results of the analysis show that the probability density dependence of the electron position is only influenced by the zenithal angle and not by the azimuthal angle.

Keywords: Deuterium, Anguler Waves, Visualization.

1. PENDAHULUAN

Proses penghasil energi pada matahari adalah melalui reaksi fusi inti hidrogen. Reaksi fusi inti hidrogen menghasilkan inti deuterium dengan penggabungan dua atom hidrogen. Sebuah atom deuterium memiliki satu proton, satu neutron, dan satu elektron. Hal ini diperoleh dari proses penggabungan dua atom hidrogen yang mengubah sebuah proton menjadi neutron disertai pancaran positron. Reaksi pembentukan atom deuterium sebagai berikut [1]:

$$ {}^{1}_{1}H + {}^{1}_{1}H \rightarrow {}^{2}_{1}H + e^{+} + v. \tag{1}$$

Atom hidrogen memiliki energi yang besar sebagaimana bom hidrogen yang memiliki tenaga dari reaksi fusi atom hidrogen yang besar yang dinamakan deuteron. Deuteron merupakan inti dari deuterium dengan satu proton dan satu neutron. Reaksi fusi dari atom hidrogen setara dengan ± 500 bom atom (inti uranium). Dalam produksi air berat, atom deuterium berperan penting dalam reaksi fisi uranium. Pada reaksi ini, air berat digunakan sebagai moderator neutron yang berfungsi memperlambat laju neutron dengan cara menyerap energi dan menumbuk neutron [2]. Sistem atom deuterium mirip dengan sistem atom hidrogen. Dalam atom deuterium, proton dianggap diam ketika elektron bergerak mengelilingi inti. Massa inti yang terdapat dalam atom jauh lebih besar dibandingkan massa elektron. Deuterium merupakan salah satu isotop hidrogen dengan susunan sederhana yang memiliki sifat kuantum mirip dengan atom hidrogen (hidrogenik) [3]. Interaksi dua atom hidrogen menghasilkan gaya tarik mutual dengan besar gaya sama tetapi arahnya berlawanan. Koordinat pusat massa dari sistem interaksi kedua inti hidrogen akan menjadi pusat inti yang baru. Inti baru yang terbentuk yakni hidrogen berat yang tidak lain adalah deuterium [4]. Dengan mengetahui gaya yang mempengaruhi kedua atom hidrogen maka besarnya energi potensial sistem dapat diketahui yang nantinya digunakan untuk mengetahui sifat kuantum dari atom tersebut. Sifat kuantum dari suatu atom penting diketahui untuk mengetahui bagaimana suatu sistem berubah terhadap waktu dengan mengetahui fungsi gelombang yang diperoleh dengan penyelesaian persamaan Schrodinger. Fungsi gelombang tersebut digunakan untuk mengetahui besaran fisika dari sistem salah satunya energi, momentum sudut, rapat peluang [5].

Persamaan Schrodinger

Persamaan Schrodinger merupakan fondasi dalam sistem mekanika kuantum. Mekanika kuantum mempelajari mengenai inti atom, atom, dan materi dalam zat padat. Ilmu ini menyangkut kerangka matematika untuk berbagai cabang fisika dan kimia. Munculnya teori mekanika kuantum disebabkan karena fenomena fisis yang muncul seperti yang berkaitan teori mekanika, elektromagnetik, dan termodinamika yang tidak dapat lagi dijelaskan dengan teori fisika klasik. Munculnya teori mekanika kuantum untuk menjelaskan keterkaitan antara gelombang dan partikel. Mekanika kuantum dikembangkan pada tahun 1925-1926 melalui pendekatan Erwin Schrodinger dan Warner Heisenberg [6]. Persamaan Schrodinger merupakan persamaan gelombang untuk atom yang hasil perhitungan analitiknya sesuai dengan hukum Ryberg. Selain itu, persamaan Schrodinger juga dapat digunakan untuk mendeskripsikan dinamika kuantum suatu sistem beratom banyak dalam pengaruh berbagai gaya. Persamaan Schrodinger untuk partikel yang memiliki energi potensial V dapat dituliskan [7]

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar}(E-V)\psi(x) = 0. \tag{2}$$

Bentuk persamaan (2) digunakan untuk kasus 1 dimensi, sedangkan untuk kasus 3 dimensi dinyatakan dengan

$$\nabla^2\psi(x,y,z) + \frac{2m}{\hbar}(E-V)\psi(x,y,z) = 0\,. \tag{3}$$

Jika potensial dari sistem merupakan fungsi posisi balik yang mengandung fungsi radial atau fungsi sudut maka persamaan Schrodinger tersebut direduksi menjadi persamaan diferensial orde dua yang memiliki solusi khusus diantaranya mengandung polinomial fungsi khusus misalnya Hermit, Legendre, Hipergeometri dll. Penyelesaian dari persamaan Schrodinger tersebut juga dapat menggunakan berbagai metode diantaranya *Wentzel-Kramers-Brillouin* (WKB), *path integral*, Nikiforov-Uvarof dll [8]. Umumnya dalam kasus tersebut, persamaan Schrodinger yang digunakan dinyatakan dalam koordinat bola dengan bentuk persamaan

$$\frac{\hbar}{2\mu r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\}\psi_{(r,\theta,\varphi)} + (E-V)\psi_{(r,\theta,\varphi)} = 0 \tag{4}$$

dengan $\psi_{(r,\theta,\varphi)}$ dapat dipisahkan menjadi tiga persamaan yang hanya bergantung pada satu variabel. Bentuk dari $\psi_{(r,\theta,\varphi)}$ ditunjukan persamaan (5)

$$\psi_{(r,\theta,\varphi)} = R(r)\,Y_\ell^m(\theta,\varphi) = R(r)\Theta_l^m(\theta)\Phi_m(\varphi)\,. \tag{5}$$

Persamaan azimuth $\Phi_m(\varphi)$ menggambarkan gerakan elektron berotasi berdasarkan sudut (φ) secara periodik pada sumbu z. Persamaan zenithal $\Theta_l^m(\theta)$ menggambarkan bentuk orbital elektron berdasarkan sudut (θ) dalam atom yang memotong sumbu xy, sedangkan fungsi radial $R(r)$ menggambarkan keberadaan elektron di sepanjang orbit elektron dari inti yang diukur dari pusat atom[9, 10].

Penelitian sebelumnya mengenai atom deuterium yang telah dilakukan diantaranya solusi persamaan Schrodinger atom deuterium dengan metode normalisasi dan separasi variabel [11], gaya tarik mutual pada deuterium[4], ketidakpastian momentum deuterium[3] dan nilai ekspetasi deuterium [2]. Pengembangan lain yang dilakukan adalah mengenai fungsi gelombang atom tritium dengan pendekatan persamaan Schrodinger melalui separasi variabel yang bertujuan menentukan fungsi gelombang tritium dengan bilangan kuantum $(n \leq 3)$ dan energi atom tritium dengan model atom Bohr [12]. Pengembangan lanjutan pada atom tritium yaitu dengan meninjau probabilitas dan nilai ekspetasi[13]. Solusi persamaan Schrodinger atom deuterium dengan metode normalisasi dan separasi variabel [11] menghasilkan fungsi gelombang radial dan sudut dimana terdapat beberapa persamaan gelombang sudut yang tidak sesuai dengan perhitungan berdasarkan teori yang digunakan. Persamaan gelombang sudut yang tidak sesuai ditunjukan oleh $Y_2^1(\theta,\varphi), Y_2^2(\theta,\varphi)$, $Y_3^{-1}(\theta,\varphi)$, $Y_3^1(\theta,\varphi), Y_3^2(\theta,\varphi), Y_3^3(\theta,\varphi)$. Hal tersebut yang mendasari perlunya melakukan pengkajian ulang pada solusi persamaan Schrodinger bagian sudut pada atom deuterium dan mengkaji aspek rapat peluang elektron beserta visualisasinya untuk mengetahui gambaran bentuk orbital. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan fungsi gelombang bagian sudut untuk atom deuterium dan memvisualisasikan kebergantungan rapat peluang posisi elektron terhadap sudut pada atom dengan Matlab.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan dalam beberapa tahap. Tahap pertama yang dilakukan adalah studi literatur terhadap sistem deuterium dan energi potensial yang dimilikinya. Langkah selanjutnya adalah menyatakan persamaan Schrodinger sistem deuterium dalam koordinat bola seperti ditunjukan oleh persamaan (9). Persamaan Schrodinger tersebut dipisahkan menjadi persamaan bagian radial dan bagian sudut. Penyelesaian bagian sudut dilakukan dengan memisahkan bagian azimuthal dan bagian zenithal. Persamaan fungsi gelombang bagian azimuthal diselesaikan dan menghasilkan solusi yang ditunjukan oleh persamaan (12). Sedangkan penyelesaian fungsi gelombang bagian zenithal didasarkan pada persamaan fungsi gelombang zenithal yang ditunjukan oleh persamaan (15). Persamaan fungsi gelombang bagian zenithal tersebut memiliki bentuk berupa persamaan diferensial orde dua yang memiliki penyelesaian berupa polinomial Legendre sekawan jenis pertama (*Assosiated Legendre Function of the First Kind*) yang ditunjukan persamaan (16). Dengan demikian penyelesaian fungsi gelombang bagian sudut dapat ditentukan berdasarkan penyelesaian persamaan fungsi gelombang bagian azimuthal dan persamaan fungsi gelombang bagian zenithal. Berdasarkan fungsi gelombang sudut yang telah diperoleh pada persamaan (22), dilakukan analisis hubungan rapat peluang posisi elektron terhadap fungsi gelombang sudut dan dilakukan visualisasi menggunakan pemrograman mengunakan Matlab. Visualisasi yang dilakukan berupa gambar 2 dimensi dan 3 dimensi. Dan langkah terakhir adalah melakukan analisis berdasarkan visualisasi rapat peluang posisi elektron terhadap sudut pada tabel 1 untuk mengetahui kebergantungan rapat peluang elektron terhadap sudut pada atom deuterium.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Atom deuterium dipandang sebagai sistem dua partikel yang terpengaruhi oleh gaya sentral. Gaya sentral terjadi akibat dua elektron dalam atom deuterium bergerak mengelilingi inti sehingga elektron berada dalam pengaruh medan potensial Coulomb. Penyelesaian persamaan Schrodinger dari atom deuterium pada bagian sudut dapat digunakan sebagai landasan untuk visualisasi dari rapat peluang elektron terhadap sudut pada atom deuterium. Suku energi potensial dalam persamaan Schrodinger atom deuterium dapat dituliskan dengan persamaan berikut:

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{6}$$

Persamaan potensial deuterium mengandung variabel radial sehingga persamaan Schrodinger yang digunakan menggunakan sistem koordinat bola. Persamaan Schrodinger untuk atom deuterium dinyatakan dengan

$$\frac{\hbar}{2\mu r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\}\psi_{(r,\theta,\varphi)}+\left(E+\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\psi_{(r,\theta,\varphi)}=0\,. \tag{7}$$

Persamaan (7) mengandung μ yang merupakan massa tereduksi elektron dan inti deuterium. Jika massa elektron dinyatakan dengan m_e dan massa inti deuterium dinyatakan dengan m_d maka μ dapat dituliskan dengan

$$\mu = \frac{m_d m_e}{m_d + m_e}. \tag{8}$$

Untuk memperoleh penyelesaian persamaan Schrodinger bagian sudut maka persamaan (7) perlu dikalikan dengan $\frac{2\mu r^2}{\hbar}$ dan dibagi dengan $R\Theta\Phi$ sehingga diperoleh bentuk

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\Phi\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\frac{2\mu r^2}{\hbar}\left(E+\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)=0. \tag{9}$$

Persamaan (9) terdiri dari persamaan sudut $Y_l^m(\theta,\varphi)$ dan radial $R_{n,\ell}(r)$. Persamaan angular $Y_l^m(\theta,\varphi)$ terdiri dari dua persamaan yakni persamaan azimuthal (φ) dan persamaan zenithal (θ) yang diselesaikan secara terpisah. Solusi untuk persamaan azimuthal (φ) dan persamaan zenithal (θ) diperoleh dengan langkah sebagai berikut:

a. Solusi Persamaan Schrodinger bagian Azimuthal (φ)

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+m^2=0 \tag{10}$$

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-m^2 \tag{11}$$

$$\Phi=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{im\varphi}. \tag{12}$$

Persamaan Schrodinger dalam koordinat bola pada bagian Azimuthal (φ) bergantung pada bilangan bulat m

$$m=\cdots-2,-1,0,1,2\cdots. \tag{13}$$

Solusi pada persamaan (12) diatas juga ekuivalen dengan ,

$$\Phi=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} & m=0\\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos m\varphi & m>0\\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin|m|\varphi & m<0\end{cases} \tag{14}$$

b. Solusi persamaan Schrodinger bagian Zenithal (θ)

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\left(\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0. \tag{15}$$

Persamaan (15) tidak lain merupakan persamaan diferensial orde dua yang memiliki solusi Polinomial Legendre sekawan jenis pertama (*Assosiated Legendre Function Of The First Kind*). Bentuk solusi dinyatakan dalam $P_l^m(\cos\theta)$ berikut:

$$\Theta(\theta)=\Theta_{lm}(\theta)=N_{\ell m}P_\ell^m(\cos\theta) \tag{16}$$

dengan N_{lm} merupakan konstanta normalisasi yang diperoleh dengan mengunakan sifat ortogonalitas dari

$$(\Theta_{\ell m}\,,\Theta_{\ell' m'})=N_{\ell m}N_{\ell' m'}\int_0^\pi P_\ell^m(cos\theta)P_{\ell'}^{m'}(\cos\theta)sin\theta d\theta=\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}. \tag{17}$$

Untuk sifat ortogonalitas $P_l^m(\cos\theta)$ dinyatakan dengan

$$\int_0^\pi P_\ell^m(cos\theta)P_{\ell'}^{m'}(\cos\theta)sin\theta d\theta=\frac{2(\ell+m)!}{(2\ell+1)(\ell-m)!}\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'} \tag{18}$$

dan diperoleh

$$\mathrm{N}_{\ell m} = \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{2(\ell+m)!}}. \tag{19}$$

Bentuk $P_l^m(\cos\theta)$ pada persamaan 16 dinyatakan dengan persamaan berikut [14]:

$$P_\ell^m(\cos\theta) = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!}\,(1-cos^2\theta)^{\frac{m}{2}}\,\frac{d^{\ell+m}}{dcos^{\ell+m}\theta}(cos^2\theta-1)^\ell. \tag{20}$$

Penyelesaian dari Persamaan Schrodinger bagian Zenithal (θ) diperoleh dengan mensubtitusikan persamaan $N_{\ell m}$ yakni persamaan (19) dan $P_\ell^m(\cos\theta)$ yang ditunjukan persamaan (20) sehingga diperoleh

$$\Theta(\theta) = \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{2(\ell+m)!}}\frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!}\,(1-cos^2\theta)^{\frac{m}{2}}\,\frac{d^{\ell+m}}{dcos^{\ell+m}\theta}(cos^2\theta-1)^\ell\,. \tag{21}$$

Berdasarkan solusi persamaan azimuthal (φ) yang ditunjukan oleh persamaan (12) dan persamaan zenithal (θ) yang ditunjukkan oleh persamaan (21) maka solusi persamaan bagian sudut $Y_l^m(\theta,\varphi)$ dapat dituliskan

$$Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}}\,P_\ell^m(\cos\theta)\,e^{im\varphi}. \tag{22}$$

Kerapatan peluang elektron pada titik r,θ,φ berbanding lurus dengan kuadrat dari fungsi gelombang pada titik tersebut, tetapi peluang yang sebenarnya adalah untuk mendapatkan elektron dalam unsur volume infinitesimal dV ialah $|\psi|^2\,dV$ yang dinyatakan dengan persamaan

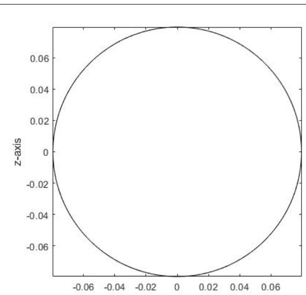
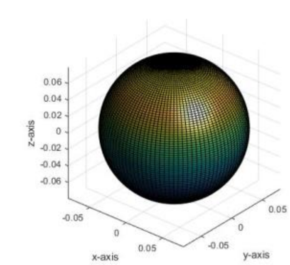
$$\wp(r,\theta,\varphi) = |\psi|^2\,dV = \left(\left|R_{n,\ell}(r)\right|^2 dr\right)(|Y_\ell^m(\theta,\varphi)|^2\,d\Omega). \tag{23}$$

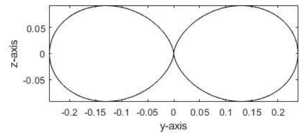
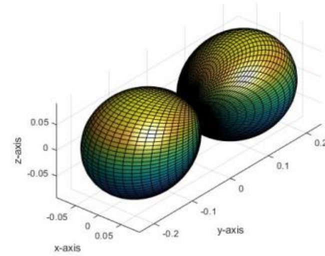
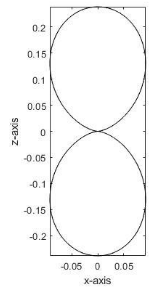
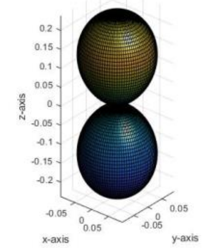
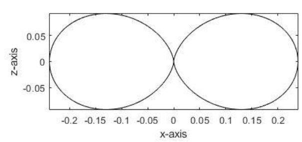
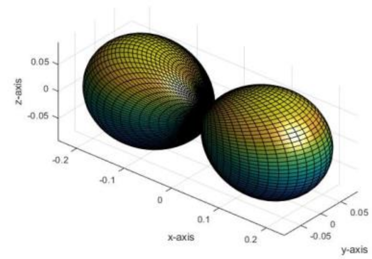
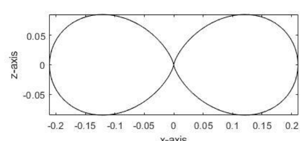
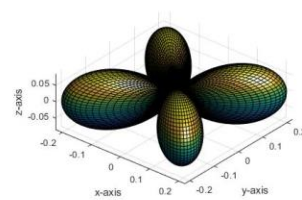
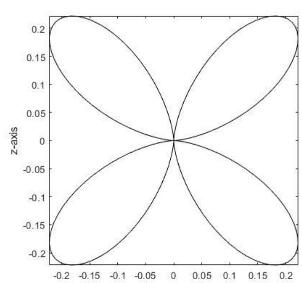
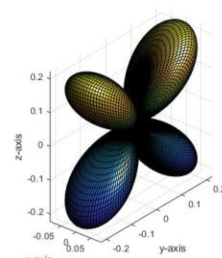
Dengan demikian rapat peluang atau kebergantungan posisi elektron berdasarkan sudut sebanding dengan besarnya kuadrat dari fungsi gelombang sudut yang dinyatakan dengan persamaan berikut:

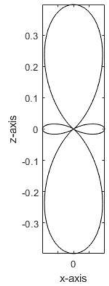
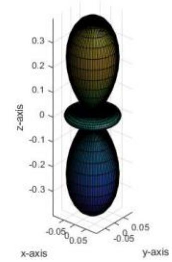
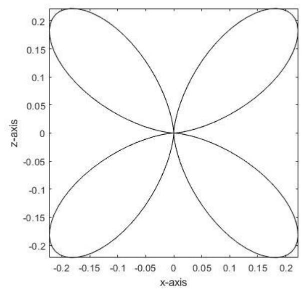
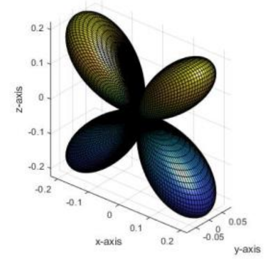
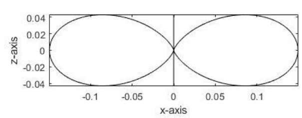
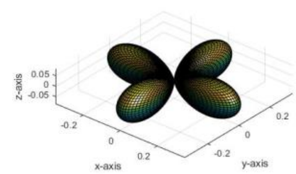
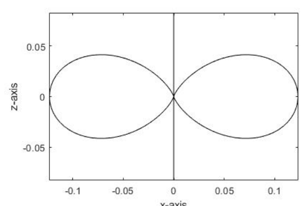
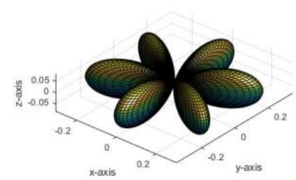
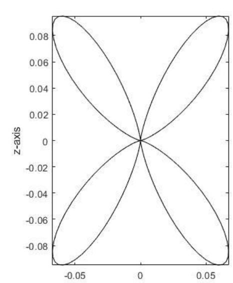
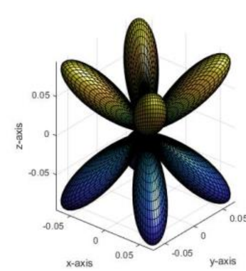
$$\wp(\theta,\varphi) \propto |Y_\ell^m(\theta,\varphi)|^2\,. \tag{24}$$

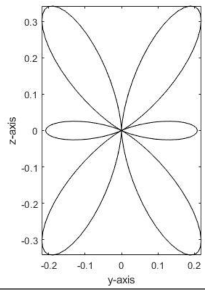
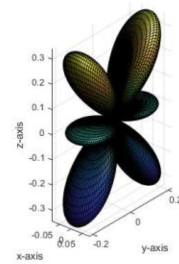
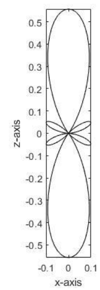
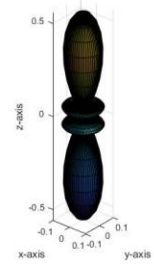
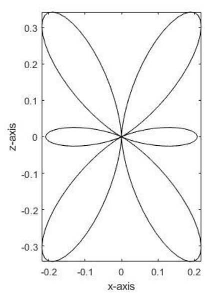
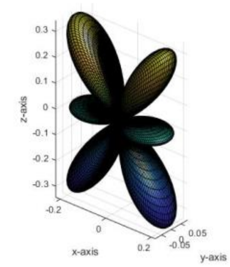
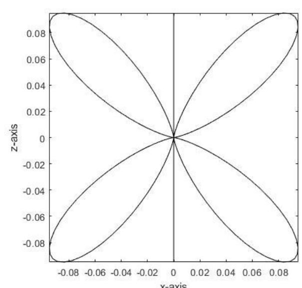
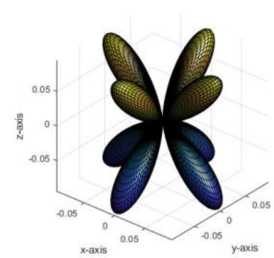
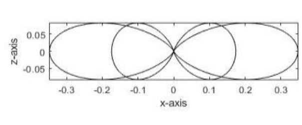
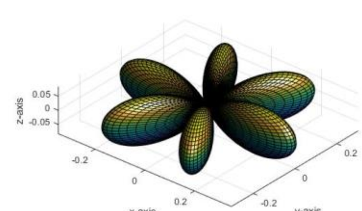
Untuk memperoleh gambaran visualisasi 2 dimensi dan 3 dimensi dari $\wp(\theta,\varphi)$ maka digunakan hubungan pada persamaan (24) diatas. Terlebih dahulu ditentukan nilai $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ dengan nilai ℓ, m yang mungkin pada bilangan kulit $n=4$. Visualisasi kerapatan elektron dilakukan dengan menggambarkan $\wp(\theta,\varphi)$ menggunakan software Matlab. Hasil Visualisasi gelombang sudut atom deuterium dari software Matlab ditunjukan oleh Tabel 1.

Tabel 1. Visualisai Rapat Peluang Posisi Elektron terhadap Sudut Pada Atom Deuterium pada kulit $n=4$.

N	L	M	$Y_\ell^m(\theta,\varphi)$	**Visualisasi 2D** $\wp(\theta,\varphi)$	**Visualisasi 3D** $\wp(\theta,\varphi)$
4	0	0	$\sqrt{\frac{1}{4\pi}}$		

	1	-1	$\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\ e^{-i\varphi}$		
		0	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$		
		1	$-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\ e^{i\varphi}$		
	2	-2	$\sqrt{\frac{5}{96\pi}}\ 3\sin^2\theta\ e^{-2i\varphi}$		
		-1	$\sqrt{\frac{5}{24\pi}}3\sin\theta\cos\theta\ \ e^{-i\varphi}$		

		0	$\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\ (3\cos^2\theta - 1)$		
		1	$-\sqrt{\frac{5}{24\pi}}\, 3\sin\theta\cos\theta\ \ e^{i\varphi}$		
		2	$\sqrt{\frac{5}{96\pi}}\ 3\sin^2\theta\ \ e^{2i\varphi}$		
	3	-3	$\sqrt{\frac{7}{2880\pi}}\, 15\sin^3\theta\ \ e^{-3i\varphi}$		
	3	-2	$\sqrt{\frac{7}{480\pi}}\, 15\ \cos\theta\ \sin^2\theta\ \ e^{-2i\varphi}$		

	3	-1	$\sqrt{\frac{7}{48\pi}}\left(\frac{15}{2}\cos^2\theta-\frac{3}{2}\right)\sin\theta\ e^{-i\varphi}$		
	3	0	$\sqrt{\frac{7}{4\pi}}\left(\frac{5}{2}\cos^3\theta-\frac{3}{2}\cos\theta\right)$		
	3	1	$-\sqrt{\frac{7}{48\pi}}\left(\frac{15}{2}\cos^2\theta-\frac{3}{2}\right)\sin\theta\ e^{i\varphi}$		
	3	2	$\sqrt{\frac{7}{480\pi}}15\ \cos\theta\ \sin^2\theta\ e^{2i\varphi}$		
	3	3	$-\sqrt{\frac{7}{2880\pi}}15\sin^3\theta\ e^{3i\varphi}$		

Berdasarkan Tabel 1 terlihat ketika bilangan kuantum $\ell = 0, m = 0$, persamaan dari fungsi gelombang bagian sudut hanya berupa nilai konstanta yang mengakibatkan $\wp(\theta,\varphi) = konstanta$. Oleh sebab itu, $\wp(\theta,\varphi) =$ tidak memiliki kebergantungan terhadap θ, φ dan membentuk visualisasi $\wp(\theta,\varphi)$ berupa bola yang berpusat pada di O. Visualisasi $\wp(\theta,\varphi)$ dengan bilangan kuantum ℓ yang sama dengan bilangan $m = \pm i$ (dimana $i = 1,2,3$) memiliki bentuk yang serupa. Hal ini terjadi karena ketika dua fungsi $\Theta_\ell^m(\theta)$

bilangan kuantum ℓ yang sama dengan m berkebalikan (misalnya $m = \pm i$) dengan i bernilai genap menghasilkan fungsi gelombang sudut yang sama

$$\Theta_\ell^{-m}(\theta) = \Theta_\ell^m(\theta) \quad m = 2, 4, \cdots. \tag{25}$$

Ketika bilangan kuantum ℓ yang sama dengan m berkebalikan (misalnya $m = 1$ dan $m = -1$) dengan i bernilai ganjil dihasilkan $\Theta_\ell^m(\theta)$ yang berkebalikan tanda

$$\Theta_\ell^{-m}(\theta) = -\Theta_\ell^m(\theta) \quad m = 1, 3, \cdots. \tag{26}$$

Fungsi $\Theta_\ell^m(\theta)$ merupakan fungsi yang mengandung $P_\ell^m(\cos\theta)$ yang merupakan Polinomial Legendre sekawan jenis pertama (*Assosiated Legendre Function Of The First Kind*) dengan bentuk $P_\ell^m(\cos\theta)$ untuk $m < 0$ [14,15]

$$P_\ell^{-m}(\cos\theta) = (-1)^m \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} P_\ell^m(\cos\theta). \tag{27}$$

Persamaan (27) diatas menunjukan bahwa $P_\ell^{-m}(\cos\theta)$ proposional dengan $P_\ell^m(\cos\theta)$.

Pada bagian sudut azimuthal (φ), perbedaan fungsi $\Phi(\varphi)$ tidak mempengaruhi bentuk visualisasi $\wp(\theta,\varphi)$ meski menghasilkan $\Phi(\varphi)$ yang berbeda. Hal ini dapat menunjukkan bahwa rapat peluang menemukan elektron tidak bergantung pada fungsi gelombang bagian sudut azimuthal (φ). Secara matematis terlihat bahwa nilai $\wp(\theta,\varphi)$ mengandung suku $|\Phi|^2$ yang nilainya

$$|\Phi|^2 = \Phi^*\Phi = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}. \tag{28}$$

Berdasarkan persamaan (28), peluang untuk memperoleh elektron dengan sudut azimuthal (φ) merupakan konstanta yang tidak bergantung dari semua φ. Hal ini mengakibatkan kerapatan peluang elektron simetri terhadap sumbu z berapapun nilai dari φ. Dengan demikian Kebergantungan rapat peluang elektron terhadap sudut pada atom deuterium hanya dipengaruhi bagian sudut zenithal (θ) yang dituliskan

$$\wp(\theta,\varphi) \propto \{\Theta_\ell^m(\theta)\}^2 \tag{29}$$

$$\wp(\theta,\varphi) \propto \{P_\ell^m(\cos\theta)\}^2. \tag{30}$$

4. KESIMPULAN

Berdasarkan studi literatur dan analisis pada sistem deuterium, persamaan Schrodinger sistem ini memuat dua bagian yakni fungsi gelombang bagian sudut dan fungsi gelombang bagian radial. Pemisahan variabel pada persamaan Shrodinger tersebut menghasilkan persamaan Schrodinger bagian sudut yang diperlukan untuk memperoleh visualisasi kebergantungan rapat peluang posisi elektron terhadap sudut. Persamaan Schrodinger bagian sudut tersebut diselesaikan dengan memisahkan persamaan sudut bagian azimuthal (φ) dan bagian zenithal (θ). Kedua bagian ini diselesaikan terpisah dan menghasilkan persamaan fungsi gelombang sudut yang ditunjukan oleh persamaan (22). Berdasarkan penyelesaian persamaan sudut tersebut dilakukan analisis kebergantungan rapat peluang posisi elektron terhadap sudut dan menghasilkan hubungan yang ditunjukkan oleh persamaan (24). Berdasarkan persamaan tersebut, visualisasi rapat peluang posisi elektron terhadap sudut digambarkan menggunakan Matlab dan menghasilkan gambar yang terdapat pada Tabel 1. Rapat peluang posisi elektron terhadap sudut pada atom deuterium hanya memiliki kebergantungan terhadap bagian sudut zenithal (θ) dan tidak dipengaruhi sudut azimuthal (φ).

5. UCAPAN TERIMAKASIH

Ucapan terima kasih kepada Jurusan Tadris Fisika Universitas Islam Negeri Sayyid Ali Rahmatullah Tulungagung yang telah memfasilitasi dan mengizinkan penelitian ini.

6. REFERENSI

[1] A. Beiser, *Konsep fisika modern / Arthur Beiser; alih bahasa, The houw Liong*, Keempat. Jakarta: Erlangga, 1992.

[2] N. Naimah, "Nilai Ekspetasi Atom Deuterium Dengan Pendekatan Persamaan Schrodinger," Universitas Jember, 2019.

[3] B. H. Saputra, B. Supriadi, dan S. H. B. Prastowo, "Ketidakpastian Momentum Atom Deuterium Menggunakan Pendekatan Ketidakpastian Heisenberg Pada Bilangan Kuantum n ≤ 3," in *Seminar Nasional Pendidikan Fisika 2019*, 2019, vol. 4, no. 1, hal. 57–64, doi: ISSN : 2527 – 5917.

[4] S. Lavenda, Y. Fuad, dan Abadi, "Persamaan Schrödinger Pada Dua Atom Hidrogen Dengan Gaya Tarik Mutual," *J. Ilm. Mat. Unesa*, vol. 2, no. 2, hal. 1–8, 2013.

[5] Sutopo, *Pengantar Fisika Kuantum*. Malang: Jurusan Fisika FMIPA UM, 2005.

[6] A. F. Amrullah, "Solusi Efek Terobosan Penghalang Ganda Dengan Persamaan Schrodinger Dua Dimensi," Universitas Jember, 2017.

[7] R. E. Siregar, *Fisika Kuantum*. Jatinagor: Universitas Padjajaran, 2018.

[8] N. Sunarmi, S. Suparmi, dan C. Cari, "Solusi Persamaan Schrödinger untuk Potensial Hulthen + Non-Sentral Poschl-Teller dengan Menggunakan Metode Nikiforov-Uvarov," *Indones. J. Appl. Phys.*, vol. 3, no. 2, hal. 169–180, 2013, doi: 10.13057/ijap.v3i02.1266.

[9] M. S. Makmum, B. Supriadi, dan T. Prihandoko, "FUNGSI GELOMBANG ION HELIUM DALAM REPRESENTASI," *J. Pembelajaran Fis.*, vol. 4, no. 4, hal. 152–159, 2020.

[10] D. D. Damayanti, "Solusi Persamaan Schrodinger Ion Helium Pada Bilangan Kuantum n ≤ 3 dalam Representasi Ruang Momentum," Universitas Jember, 2020.

[11] F. Fuadah, S. H. B. Prastowo, dan L. Nuraini, "Seminar Nasional Pendidikan Fisika 2018 Solusi Persamaan Schrodinger Atom Deuterium Seminar Nasional Pendidikan Fisika 2018," in *Seminar Nasional Pendidikan Fisika 2018*, 2018, vol. 3, no. 1, hal. 142–147, [Daring]. Tersedia pada: http://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.2343497%0Ahttp://journal2.um.ac.id/index.php/jpsi/article/download/651/791.

[12] S. K. Wardani, "Fungsi Gelombang Atom Tritium dengan Pendekatan Persamaan Schrodinger," Universitas Jember, 2019.

[13] F. Utami, B. Supriadi, dan A. D. Lesmono, "Probabilitas Posisi Elektron Dalam Atom Tritium Pada Bilangan Seminar Nasional Pendidikan Fisika 2019," in *Seminar Nasional Pendidikan Fisika 2019*, 2019, vol. 4, no. 1, hal. 241–245, doi: ISSN : 2527 – 5917.

[14] G. B. Arfken, H. J. Weber, dan F. E. Harris, *Mathematical Methods for Physicists - A comprehensive Guide*, Seventh Ed., vol. 40, no. 4. New York: Elseiver, 2013.

[15] M. L. Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, 3 ed. USA: John Wiley & Sons, Inc, 1983.