

Simulasi Gerak Partikel Bermuatan dalam Medan Magnet Menggunakan Metode Euler dan JavaScript P5.js untuk Game Edukasi Berbasis Web

Casmika Saputra^{1,2*}, Rahmat Awaludin Salam^{1,2}, Akhmadi Akhmadi³

¹ Teknik Fisika, Fakultas Teknik Elektro, Universitas Telkom, Indonesia

² PUI-PT Intelligent Sensing-IoT, Universitas Telkom, Indonesia

³ Desain Interior, Fakultas Industri Kreatif, Universitas Telkom, Indonesia

ARTICLE INFO

Riwayat Artikel:

Draft diterima: 30 Juli 2024

Revisi diterima: 13 Oktober 2024

Diterima: 15 Oktober 2024

Tersedia Online: 30 Oktober 2024

Corresponding author:

casmika@telkomuniversity.ac.id

ABSTRAK

Penelitian ini menginvestigasi gerak partikel bermuatan dalam medan magnet melalui pendekatan numerik menggunakan metode Euler, serta implementasinya dalam simulasi berbasis web untuk tujuan edukasi. Penelitian sebelumnya telah menunjukkan bahwa pelajar mengalami kesulitan memahami konsep ini karena bersifat abstrak dan tidak intuitif secara visual. Dibandingkan metode lain seperti Runge-Kutta, metode Euler dipilih karena kalkulasinya yang lebih sederhana. Partikel bermuatan yang bergerak dalam medan magnet mengalami gaya Lorentz yang menyebabkan lintasan melingkar. Simulasi dikembangkan menggunakan pustaka P5.js, memungkinkan visualisasi dinamis gerak partikel. Hasil simulasi menunjukkan bahwa kesalahan integrasi meningkat dengan langkah waktu yang lebih besar, tetapi dapat diminimalkan dengan langkah yang lebih kecil. Pemilihan langkah waktu yang tepat diperlukan untuk menjaga akurasi visualisasi agar tidak terjadi kesalahan interpretasi. Integrasi simulasi ke dalam game edukasi berbasis web menunjukkan potensi sebagai alat bantu interaktif untuk pemahaman lebih mendalam tentang medan magnet dan gaya Lorentz.

Kata kunci: Gerak Partikel, JavaScript, Medan Magnet, P5.js, Simulasi Numerik.

ABSTRACT

This study investigates the motion of charged particles in a magnetic field through a numerical approach using the Euler method, and its implementation in a web-based simulation for educational purposes. Previous research has shown that students struggle to grasp this concept due to its abstract nature and lack of intuitive visual representation. Compared to other methods like Runge-Kutta, the Euler method was chosen for its simpler calculations. Charged particles moving in a magnetic field experience the Lorentz force, causing them to follow a circular path. The simulation, developed using the P5.js library, provides dynamic visualizations of particle motion. The results indicate that integration errors increase with larger time steps but can be minimized with smaller steps. Selecting an appropriate time step is essential to maintain visualization accuracy and avoid misinterpretation. The integration of this simulation into a web-based educational game shows potential as an interactive tool to enhance understanding of magnetic fields and the Lorentz force.

Keywords: Charged Particle, Educational Game, Magnetic Field, Numerical Simulation.

1. PENDAHULUAN

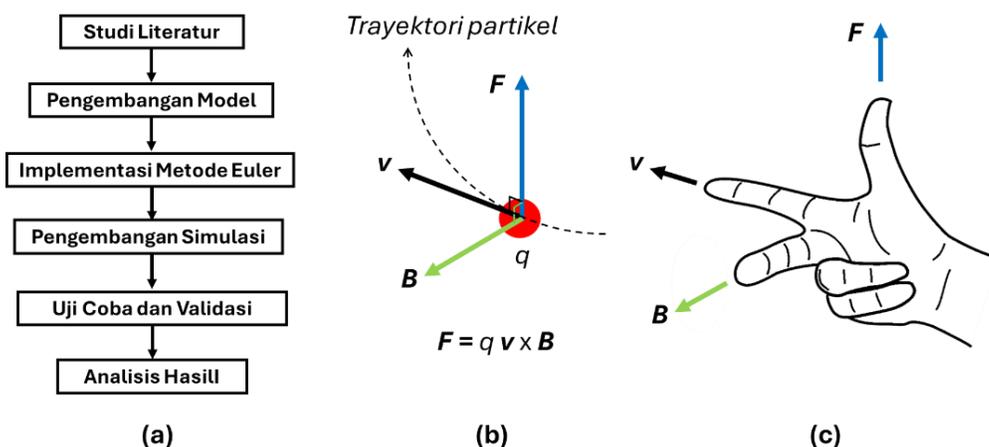
Gerak partikel bermuatan dalam medan magnet adalah fenomena fisika yang esensial dan menarik untuk dipelajari. Ketika sebuah partikel bermuatan, seperti elektron atau proton, bergerak dalam medan magnet, ia mengalami gaya Lorentz. Gaya ini bekerja tegak lurus terhadap arah gerak partikel dan arah medan magnet, menyebabkan partikel bergerak dalam lintasan melingkar atau heliks. Gerakan partikel bermuatan dalam medan magnet merupakan konsep fundamental dan memiliki banyak aplikasi penting dalam teknologi fusi, fisika ruang angkasa, riset material, hingga diagnostik medis [1], [2], [3], [4], [5]. Namun sering kali konsep gerak partikel bermuatan dalam medan magnet sulit dipahami oleh pelajar. Kesulitan ini umumnya disebabkan oleh sifat abstrak dari konsep tersebut dan kurangnya representasi visual yang intuitif dalam pembelajaran [6].

Simulasi gerak partikel bermuatan dalam medan magnet menawarkan solusi untuk memvisualisasikan dan memahami perilaku partikel tanpa perlu melakukan eksperimen fisik yang mahal dan kompleks [7], [8]. Biasanya, simulasi semacam ini dilakukan menggunakan perangkat lunak seperti MATLAB, Comsol, Python, dan pemrograman lainnya [7], [8], [9], [10], [11]. Dalam penelitian ini, kami menggunakan JavaScript dengan pustaka P5.js untuk pengembangan simulasi [12]. MATLAB dan COMSOL cenderung kompleks dan membutuhkan pemahaman yang mendalam tentang pemrograman dan model matematis. Di sisi lain, Python, meskipun lebih fleksibel, mungkin tidak menyediakan visualisasi yang cukup interaktif untuk menjelaskan fenomena fisika ini secara efektif. Dalam konteks ini, P5.js dipilih karena selain *open source*, ia juga memiliki keunggulan dalam kemudahan penulisan kode, kemampuan visualisasi yang superior, dan kompatibilitasnya yang luas dalam pengembangan aplikasi web.

Dengan memanfaatkan P5.js, kami bertujuan untuk menciptakan simulasi yang dapat diakses secara langsung melalui web, sehingga memungkinkan pengguna, mulai dari pelajar hingga peneliti, untuk menjalankan simulasi tanpa memerlukan perangkat lunak tambahan. Selain itu, simulasi ini dirancang untuk integrasi dalam game edukasi, menyediakan metode belajar yang interaktif dan menyenangkan. Dengan fokus pada aplikasi dalam konteks game edukasi, kami berharap simulasi ini tidak hanya meningkatkan pemahaman tentang gerak partikel bermuatan dalam medan magnet, tetapi juga dapat menarik minat yang lebih luas dalam studi fisika.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan dengan pendekatan numerik menggunakan metode Euler untuk mensimulasikan gerak partikel bermuatan dalam medan magnet. Proses penelitian dimulai dengan studi literatur untuk meninjau penelitian sebelumnya dan teori terkait gerak partikel yang dipengaruhi oleh gaya Lorentz. Selanjutnya, model matematis dirancang berdasarkan persamaan gerak tersebut. Setelah model terbentuk, algoritma dikembangkan menggunakan metode Euler untuk menghitung posisi dan kecepatan partikel secara iterasi. Simulasi kemudian dikembangkan menggunakan pustaka P5.js, yang memungkinkan visualisasi gerak partikel secara dinamis dalam format berbasis web. Setelah itu, simulasi diuji coba dengan berbagai langkah waktu untuk mengevaluasi akurasi dan memperbaiki kesalahan integrasi yang muncul. Akhirnya, hasil simulasi dianalisis untuk menilai langkah waktu yang tepat agar mendapatkan hasil simulasi yang akurat. Alur penelitian ini disajikan pada Gambar 1a.



Gambar 1. (a) alur penelitian, (b) ilustrasi gerak partikel bermuatan q pada medan magnet B dan gaya F yang timbul menyebabkan arah v berubah, serta (c) aturan tangan kanan untuk menentukan operasi produk silang vektor v dan B .

a. Rumusan Analitik

Gerak partikel bermuatan dalam medan magnet dapat dijelaskan dengan menggunakan gaya Lorentz, lihat Gambar 1b, yang dinyatakan dengan Persamaan 1 berikut,

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (1)$$

di mana F , q , v , dan B berturut-turut adalah gaya Lorentz, muatan partikel, kecepatan partikel, dan medan magnet. Untuk memudahkan dalam penentuan arah hasil produk silang (\times), kita dapat menggunakan aturan tangan kanan, Gambar 1c. Secara umum, gaya F menyebabkan partikel bergerak secara spiral. Untuk kasus v dan B tegak lurus, gaya F menyebabkan partikel mengalami percepatan sentripetal yang mengarah ke pusat lintasan melingkar, yang dinyatakan dengan,

$$\vec{F} = m\vec{a}_c = -\frac{mv^2}{r}\hat{r} \quad (2)$$

di mana a_c , m , dan r berturut-turut merupakan percepatan sentripetal, massa partikel, jari-jari lintasan partikel. Tanda minus menunjukkan arah yang menuju pusat lintasan. Dengan demikian, periode gerak melingkar partikel dapat dihitung menggunakan:

$$qvB = \frac{mv^2}{r} \rightarrow qB = m\omega = \frac{m2\pi}{T}$$

sehingga,

$$T = 2\pi \frac{m}{qB} \quad (3)$$

b. Rumusan Numerik: Metode Euler

Perhitungan gerak partikel dilakukan menggunakan metode Euler orde 1. Metode ini memerlukan integrasi percepatan menjadi kecepatan dan integrasi kecepatan menjadi posisi. Pertama, menentukan percepatan partikel berdasarkan gaya Lorentz: $\vec{a} = \vec{F}/m$. Untuk kasus $\vec{B} = B_z\hat{k}$ dan $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$, maka perhitungan secara numerik dapat ditulis sebagai:

$$a_{xi} = \frac{F_{xi}}{m} = q(v_{yi}B_z - v_{xi}B_z) \quad (4a)$$

$$a_{yi} = \frac{F_{yi}}{m} = q(v_{xi}B_z - v_{yi}B_z) \quad (4b)$$

di mana x dan y mewakili sumbu- x dan sumbu- y dan a_{xi} , a_{yi} , v_{xi} , dan v_{yi} adalah percepatan pada sumbu- x , percepatan pada sumbu- y , kecepatan pada sumbu- x , dan kecepatan pada sumbu- y pada langkah ke- i . Dengan metode Euler, nilai kecepatan perlu *update* dengan cara berikut:

$$v_{x(i+1)} = v_{xi} + a_{xi} \Delta t \quad (5a)$$

$$v_{y(i+1)} = v_{yi} + a_{yi} \Delta t \quad (5b)$$

di mana Δt adalah langkah waktu. Waktu simulasi dihitung dari $t = i\Delta t$. Sehingga posisi setiap langkah partikel dapat dihitung dengan cara berikut:

$$x_{(i+1)} = x_i + v_{xi} \Delta t \quad (6a)$$

$$y_{(i+1)} = y_i + v_{yi} \Delta t \quad (6b)$$

Metode Euler adalah metode integrasi numerik sederhana yang memiliki tingkat kesalahan yang proporsional dengan ukuran langkah waktu Δt . Kesalahan metode Euler dapat diekspresikan sebagai:

$$\text{Error} \approx O(\Delta t^2) \quad (3)$$

Ini berarti bahwa kesalahan total akan berkurang dengan kuadrat dari pengurangan langkah waktu. Sehingga untuk mendapatkan hasil yang akurat, langkah waktu Δt harus cukup kecil. Oleh karena itu, penting untuk memilih Δt yang optimal yang cukup kecil untuk mengurangi kesalahan tetapi tidak terlalu kecil sehingga memperlambat simulasi secara signifikan.

c. Implementasi dalam Simulasi

Simulasi gerak partikel dikembangkan menggunakan bahasa pemrograman JavaScript menggunakan pustaka P5.js. Proses pengembangan simulasi meliputi pembuatan antarmuka pengguna untuk mengatur parameter simulasi, seperti kecepatan awal

partikel dan medan magnet, serta algoritma untuk menghitung posisi partikel setiap saat. Visualisasi gerak partikel ditampilkan secara real-time, memungkinkan pengguna untuk melihat langsung efek dari perubahan parameter yang mereka buat. Simulasi gerak partikel bermuatan dalam medan magnet ini telah diimplementasikan dalam Game Edukasi berbasis web (phy.gradien.my.id). PhyGradien merupakan platform interaktif yang dapat diakses oleh siapa saja melalui web browser yang dapat dijadikan sebagai alat pembelajaran untuk memahami konsep fisika dasar.

3. HASIL DAN DISKUSI

a. Gerakan partikel bermuatan dalam medan magnet

Ketika sebuah partikel bermuatan, seperti elektron, proton atau lainnya, bergerak dalam medan magnet, gaya yang dialaminya dikenal sebagai gaya Lorentz. Gaya ini bekerja tegak lurus terhadap arah kecepatan partikel dan medan magnet, menyebabkan partikel mengikuti lintasan melingkar atau heliks, Lihat Persamaan 1– 3. Dalam kasus medan magnet yang keluar dari bidang xy (medan magnet ke arah sumbu z positif), dan partikel bermuatan positif memiliki kecepatan awal ke arah sumbu x positif, lintasan gerakannya akan membentuk lingkaran dalam bidang xy searah jarum jam. Ini karena gaya Lorentz akan selalu tegak lurus terhadap kecepatan partikel, memaksa partikel untuk bergerak melingkar. Jari-jari lintasan melingkar (r) dari partikel bermuatan dalam medan magnet dapat dihitung dengan menggunakan hubungan antara gaya sentripetal dan gaya Lorentz, yaitu:

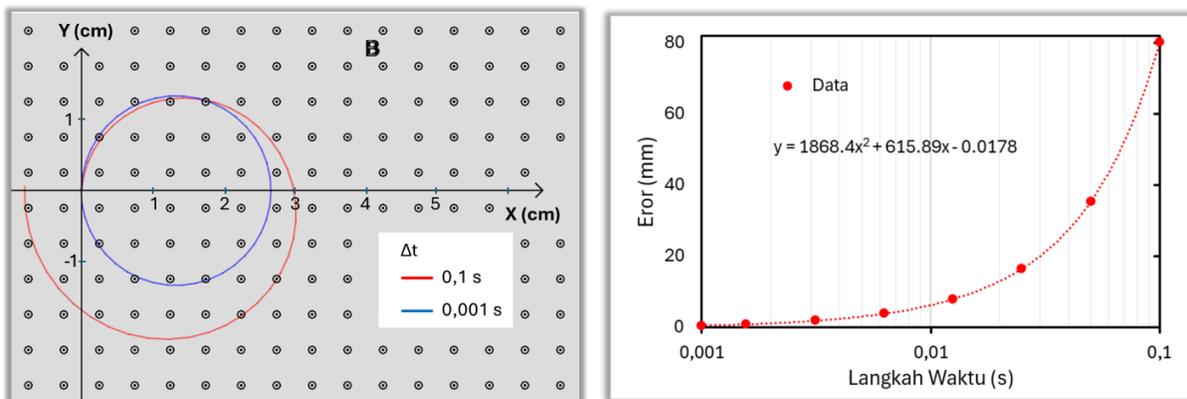
$$r = \frac{qB}{mv} \tag{8}$$

Gerakan partikel akan mengikuti aturan tangan kanan, di mana jika ibu jari menunjukkan arah kecepatan awal (sumbu x positif) dan jari-jari lain menunjukkan arah medan magnet (sumbu z positif), maka gaya Lorentz akan menunjuk ke arah sumbu y negatif, menyebabkan partikel berputar dalam lintasan melingkar searah jarum jam jika dilihat dari arah sumbu z positif. Dalam koordinat dua dimensi (xy), gerakan partikel akan terlihat sebagai lingkaran dengan jari-jari pada Persamaan 8.

Pada setiap titik dalam lintasan, kecepatan partikel akan terus berubah arah namun tetap pada bidang xy, sementara besar kecepatannya tetap konstan karena gaya Lorentz tidak melakukan kerja (tidak mengubah energi kinetik partikel). Akibatnya, partikel bergerak dengan kecepatan konstan dalam lintasan melingkar, di mana gaya sentripetal yang dibutuhkan untuk mempertahankan gerak melingkar ini disediakan oleh gaya Lorentz.

b. Simulasi Numerik

Simulasi gerak dalam bidang dua dimensi menggunakan metode Euler dapat memberikan gambaran visual yang jelas tentang bagaimana partikel bermuatan bergerak dalam medan magnet, memperlihatkan interaksi antara gaya Lorentz, kecepatan partikel, dan medan magnet secara dinamis. Perhitungan gerak partikel dilakukan menggunakan metode Euler, lihat Persamaan 4–6. Untuk mendapatkan posisi setiap saat, diperlukan integrasi percepatan menjadi kecepatan dan kemudian integrasi kecepatan menjadi posisi. Untuk setiap langkah waktu kecil, kecepatan partikel diupdate berdasarkan percepatan yang dialami, dan posisi partikel diupdate berdasarkan kecepatan baru. Meskipun metode ini sederhana, ia cukup efektif untuk kebutuhan simulasi ini, terutama mengingat langkah waktu yang kecil dapat digunakan untuk meminimalkan kesalahan integrasi. Untuk meninjau efek langkah waktu terhadap eror yang terjadi, telah dilakukan variasi langkah waktu dengan perhitungan numerik selama satu kali periode (T), lihat Gambar 2. Periode ditentukan dari Persamaan 3.



Gambar 2. (a) Lintasan partikel dengan Δt kecil dan besar dan (b) Eror yang dihasilkan terhadap variasi Δt . ($v = 2$ cm/s, $B = 5$ μ T, dan $q/m = 105$ C/kg)

Hasil pada Gambar 2a memperlihatkan posisi partikel saat awal di (0,0) hingga saat $t = T$. Saat $t = T$, posisi partikel secara analitik Kembali berada pada posisi awal. Namun, lintasan dengan $\Delta t = 0,1$ s memiliki penyimpangan yang sangat signifikan dibandingkan dengan $\Delta t = 0,001$ s. Penyimpangan posisi (error posisi) terhadap beragam nilai Δt disajikan pada Gambar 2b. Hasil menunjukkan bahwa error posisi semakin besar untuk langkah waktu yang besar. Error yang dihasilkan sesuai dengan Persamaan 7 yang menunjukkan hubungan kuadratik [13]. Dengan demikian, dalam simulasi ini dipilih $\Delta t = 0,001$ s dengan error < 1 mm.

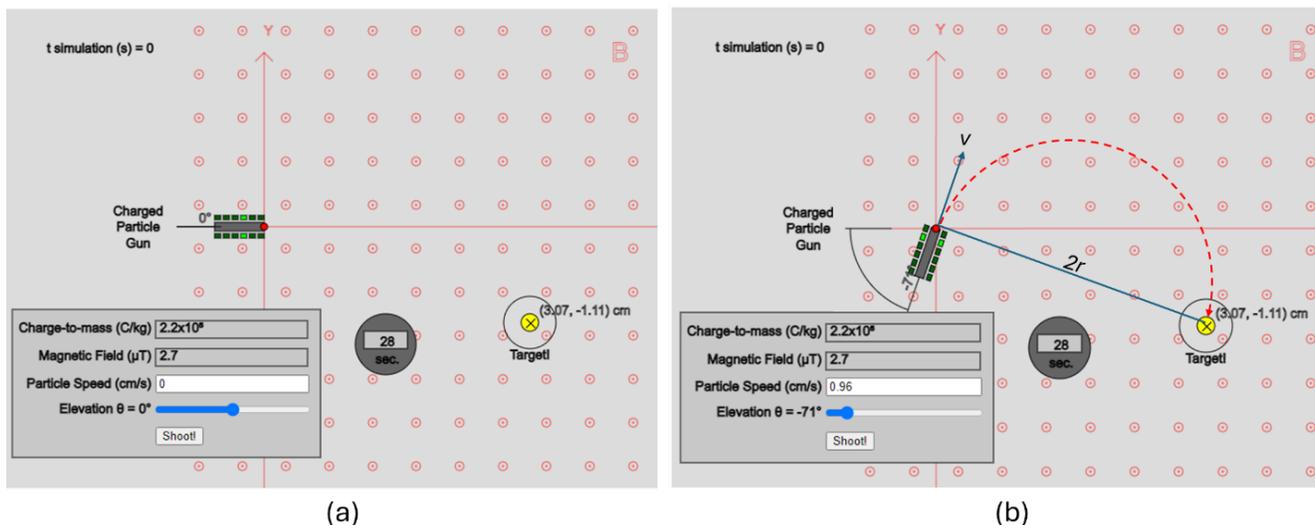
c. Implementasi Simulasi untuk Game Edukasi

Simulasi pergerakan partikel bermuatan dalam medan magnet dapat dijadikan sebagai alat bantu dalam proses pembelajaran fisika. Dengan visualisasi gerak melingkar yang dihasilkan dapat membantu pemelajar memahami konsep medan dan gaya magnetik [6], [14]. Implementasi lebih lanjut, simulasi pergerakan partikel bermuatan dalam medan magnet dapat diterapkan pada game edukasi berbasis web (phy.gradien.my.id). Sebagai contoh: misalkan terdapat sebuah tembakan partikel bermuatan yang arah dan besar kecepatannya dapat diatur. Partikel bermuatan yang ditembakkan bergerak dalam pengaruh medan magnet, lihat Gambar 3. Terdapat sebuah target yang memiliki posisi tertentu. Bagaimana caranya agar tembakan dapat mengenai sasaran? ($B = 2,7 \mu\text{T}$ dan $q/m = 2,2 \times 10^8 \text{ C/kg}$.)

Untuk memastikan partikel bermuatan mengenai target, trik berikut dapat digunakan dalam simulasi:

- Hitung Radius Gerak Melingkar: Radius lintasan melingkar partikel berhubungan dengan kecepatan awal, muatan per massa, dan medan magnet, lihat Persamaan 8. Mengetahui radius ini membantu dalam menargetkan partikel ke posisi yang tepat. Radius (r) dapat kita estimasi dari setengah jarak tembakan dan target ($2r$). Sebagai contoh: posisi target diketahui di (3,05 cm, -1,11 cm). Sehingga $r = (\sqrt{3,05^2 + (-1,11)^2}) / 2 \approx 1.63$ cm, lihat Gambar 3a.
- Penentuan Kecepatan Awal: Kecepatan awal partikel diatur sedemikian rupa sehingga lintasan melingkarinya dapat mencapai target. Ini melibatkan penyesuaian kecepatan dan arah awal partikel untuk memastikan bahwa gaya Lorentz mengarahkan partikel ke sasaran. Besar kecepatan dapat dihitung melalui Persamaan 8, $v = \frac{qB}{mr} \approx 0,96$ cm/s. Arah kecepatan awal (sudut elevasi) dapat dihitung dari $\alpha = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) \approx -19,71^\circ$ dan dengan $\theta = -90 - \alpha \approx -71$, lihat Gambar 3b.

Dengan cara ini, tembakan partikel bermuatan dalam simulasi dapat diatur untuk memastikan bahwa partikel mengenai target dengan presisi yang diinginkan. Tentu ini adalah salah satu solusi yang mudah dihitung. Implementasi ini tidak hanya memvalidasi pemahaman konsep fisika tetapi juga menyediakan alat interaktif yang berguna untuk pembelajaran dan eksperimen dalam konteks edukasi berbasis web.



Gambar 3. (a) Kasus tembakan partikel bermuatan dan (b) salah satu solusi kecepatan awal agar partikel mengenai target.

Simulasi ini berhasil menunjukkan konsep dasar gerak partikel bermuatan dalam medan magnet dengan cara yang interaktif dan mudah diakses. Penggunaan metode Euler memungkinkan perhitungan gerak yang efektif meskipun memiliki keterbatasan dalam akurasi. Integrasi simulasi ke dalam game edukasi memberikan nilai tambah dengan membuat pembelajaran lebih menarik dan menyenangkan.

Namun, ada beberapa keterbatasan yang perlu diperhatikan. Kesalahan integrasi yang dihasilkan oleh metode Euler dapat menjadi signifikan jika langkah waktu tidak dipilih dengan tepat. Selain itu, simulasi ini berfokus pada model dua dimensi, sementara gerak partikel dalam medan magnet sering kali terjadi dalam tiga dimensi. Pengembangan lebih lanjut dapat mencakup penggunaan metode integrasi yang lebih akurat dan perluasan simulasi ke model tiga dimensi. Secara keseluruhan, simulasi ini memberikan alat yang efektif untuk memahami gerak partikel bermuatan dalam medan magnet dan dapat digunakan sebagai platform pembelajaran yang inovatif dalam konteks game edukasi.

4. KESIMPULAN

Simulasi gerak partikel bermuatan dalam medan magnet menggunakan metode Euler dan pustaka P5.js telah berhasil dikembangkan. Simulasi ini tidak hanya memungkinkan visualisasi dinamis dari lintasan melingkar partikel bermuatan, tetapi juga secara efektif menggambarkan interaksi kompleks antara gaya Lorentz, kecepatan partikel, dan medan magnet. Analisis hasil perhitungan numerik mengungkapkan bahwa kesalahan integrasi meningkat seiring bertambahnya langkah waktu, yang konsisten dengan karakteristik kuadratik kesalahan metode Euler. Hal ini menunjukkan pentingnya pemilihan langkah waktu yang tepat untuk meminimalkan kesalahan dan memastikan akurasi simulasi. Implementasi simulasi ini dalam game edukasi berbasis web menunjukkan potensinya sebagai alat bantu pembelajaran interaktif yang dapat meningkatkan pemahaman konsep medan magnet dan gaya Lorentz dengan cara yang lebih mendalam dan intuitif. Dengan demikian, penelitian ini tidak hanya memberikan kontribusi terhadap pemahaman teori fisika, tetapi juga menawarkan solusi inovatif untuk pengajaran yang lebih efektif.

5. UCAPAN TERIMA KASIH

Penelitian ini didanai oleh Hibah *Learning Excellence* (HLE) 2024, Universitas Telkom.

6. REFERENSI

- [1] Y. Wu and S. Şahin, "3.13 Fusion Energy Production," in *Comprehensive Energy Systems*, I. Dincer, Ed., Oxford: Elsevier, 2018, pp. 538–589. doi: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-809597-3.00330-8>.
- [2] J. A. Bittencourt, "Charged Particle Motion in Time-Varying Electromagnetic Fields," in *Fundamentals of Plasma Physics*, J. A. Bittencourt, Ed., New York, NY: Springer New York, 2004, pp. 95–121. doi: [10.1007/978-1-4757-4030-1_4](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4030-1_4).
- [3] J. B. Westgard, "Particle Motion in Electromagnetic Fields," in *Electrodynamics: A Concise Introduction*, J. B. Westgard, Ed., New York, NY: Springer New York, 1997, pp. 311–348. doi: [10.1007/978-1-4612-2356-6_7](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2356-6_7).
- [4] S. U. Khan, U. Uktamov, J. Rayimbaev, A. Abdujabbarov, I. Ibragimov, and Z.-M. Chen, "Circular orbits and collisions of particles with magnetic dipole moment near magnetized Kerr black holes in modified gravity," *The European Physical Journal C*, vol. 84, no. 2, p. 203, 2024, doi: [10.1140/epjc/s10052-024-12567-2](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-024-12567-2).
- [5] R. L. Liboff, "Brownian Motion of Charged Particles in Crossed Electric and Magnetic Fields," *Physical Review*, vol. 141, no. 1, pp. 222–227, Jan. 1966, doi: [10.1103/PhysRev.141.222](https://doi.org/10.1103/PhysRev.141.222).
- [6] M. Ben Ouahi, D. Lamri, T. Hassouni, and E. M. Al Ibrahim, "Science teachers' views on the use and effectiveness of interactive simulations in science teaching and learning," *International Journal of Instruction*, vol. 15, no. 1, pp. 277–292, Jan. 2022, doi: [10.29333/iji.2022.15116a](https://doi.org/10.29333/iji.2022.15116a).
- [7] J. G. A. Guzmán, V. Florinski, G. Tóth, S. Sharma, B. van der Holst, and M. Opher, "Numerical Modeling of Energetic Charged-particle Transport with SPECTRUM Software: General Approach and Artificial Effects due to Field Discretization," *Astrophys J Suppl Ser*, vol. 272, no. 2, p. 46, 2024, doi: [10.3847/1538-4365/ad4637](https://doi.org/10.3847/1538-4365/ad4637).
- [8] P. K. Soni, B. Kakad, and A. Kakad, "Simulation study of motion of charged particles trapped in Earth's magnetosphere," *Advances in Space Research*, vol. 67, no. 2, pp. 749–761, 2021, doi: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2020.10.020>.
- [9] F. Sciortino et al., "Modeling of particle transport, neutrals and radiation in magnetically-confined plasmas with Aurora," *Plasma Phys Control Fusion*, vol. 63, no. 11, p. 112001, 2021, doi: [10.1088/1361-6587/ac2890](https://doi.org/10.1088/1361-6587/ac2890).
- [10] R. Van Durme, G. Crevecoeur, L. Dupré, and A. Coene, "Model-based optimized steering and focusing of local magnetic particle concentrations for targeted drug delivery," *Drug Deliv*, vol. 28, no. 1, pp. 63–76, Jan. 2021, doi: [10.1080/10717544.2020.1853281](https://doi.org/10.1080/10717544.2020.1853281).
- [11] M. Borghei, M. Ghassemi, J. M. Rodríguez-Serna, and R. Albarracín-Sánchez, "A Finite Element Analysis and an Improved Induced Charge Concept for Partial Discharge Modeling," *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 36, no. 4, pp. 2570–2581, 2021, doi: [10.1109/TPWRD.2020.2991589](https://doi.org/10.1109/TPWRD.2020.2991589).

- [12] "p5.js." Accessed: Jul. 30, 2024. [Online]. Available: <https://p5js.org/>
- [13] T. E. Hull, W. H. Enright, B. M. Fellen, and A. E. Sedgwick, "Comparing Numerical Methods for Ordinary Differential Equations," *SIAM J Numer Anal*, vol. 9, no. 4, pp. 603–637, 1972, [Online]. Available: <http://www.jstor.org/stable/2156215>
- [14] R. Gomes Mendonça Neves, J. L. Schwartz, J. Carvalho Silva, and V. Duarte Teodoro, *Learning introductory physics with computational modeling and interactive environments*. 2012. [Online]. Available: <https://www.researchgate.net/publication/235354433>